Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

CURSOS DE ENG. CIVIL E ENG. DE TERRITÓRIO

TESTE 1 – 10 DE NOVEMBRO DE 2003

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere o sólido
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : 0 < x < 1\, ,\, 0 < y < x\, ,\, 0 < z < 1 - x^2\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\iiint dx\,dy\,dz$.

(3 val.) (b) Calcule o integral $\iiint_V 2y$ usando um integral iterado da forma $\iiint dz\,dy\,dx$.

(3 val.) (2) Um sólido com a forma da região
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z^2 < x^2 + y^2\, ;\, x^2 + y^2 + z^2 < 2\,\}$$
tem densidade de massa $\sigma(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

(3) Considere os campos vectoriais F e G definidos por
$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \left(3zx^2, \operatorname{sen} z + z, y\cos z + y + x^3\right) \\ G(x,y,z) &= \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}, 0\right) \end{aligned}$$

(3 val.) (a) Calcule o integral de linha de F ao longo de um arco de circunferência definido por $y^2 + z^2 = 1$ e $x = 1$, desde o ponto $(1,1,0)$ até ao ponto $(1,0,1)$.

(2 val.) (b) Mostre que G é fechado. Diga, justificadamente, se G é ou não um gradiente no seu domínio.

(3 val.) (c) Calcule o trabalho
$$\int_\Gamma (F+G) \cdot dg$$
onde Γ é a fronteira do quadrado, no plano $z = 0$, que une os pontos $(2,1,0), (0,1,0), (0,-1,0)$ e $(2,-1,0)$, percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto $(1,0,5)$.

(3 val.) (4) Seja R uma região elementar em $\mathbb{R}^2$ com área A e cuja fronteira é uma curva C regular e simples. Prove que o centróide $(\overline{x}, \overline{y})$ de R é dado por
$$\overline{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2 dy, \quad \overline{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2 dx.$$