Análise Matemática III
1º semestre de 2003/2004

Exercício teste 10 (a entregar na aula prática da semana de 01/12/2003)

O conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 = z^2 + 1\right\}$$

tem um (ou mais) pontos que se encontram a uma distância mínima, d_{min}, da origem. Determine o valor de d_{min} usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Resolução

Consideramos a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e que corresponde ao quadrado da distância do ponto de coordenadas (x, y, z) à origem.

Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$F(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - z^2 - 1.$$

Então os pontos que pertencem a M são os pontos que verificam $F(x, y, z) = 0$. A derivada

$$DF(x, y, z) = [\ 2(x-1) \quad 2(y-1) \quad -2z\ ]$$

tem característica igual a 1 em todos os pontos de M (o único ponto onde a característica é igual a zero é no ponto $(1, 1, 0)$ que não pertence a M). Portanto o conjunto M é uma variedade de dimensão 2.

Assim, pretendemos determinar os pontos de mínimo de f e que pertencem à variedade dada pela equação $F(x, y, z) = 0$. Logo, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, devemos determinar os pontos de estacionaridade da função

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda((x-1)^2 + (y-1)^2 - z^2 - 1),$$

ou seja, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-1) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y-1) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = z^2 + 1 \end{cases}$$

Da primeira e segunda equações podemos concluir que $x = y$ e da terceira obtemos

$$z(1-\lambda) = 0 \iff z = 0 \ \vee \ \lambda = 1.$$

Se $z = 0$, usando a igualdade $x = y$, obtemos da última equação $2(x-1)^2 = 1$ e, portanto obtemos os pontos

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Para $\lambda = 1$ obtemos $x = y = \frac{1}{2}$ e substituindo na última equação obtemos $z^2 = -\frac{1}{2}$ o que nos dá uma condição impossível. Assim, temos dois pontos que são candidatos à solução do problema.

Sendo

$$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3+2\sqrt{2}$$

$$f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3-2\sqrt{2}$$

concluimos que a distância mínima, d_{min}, é $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.