Análise Matemática III
1º semestre de 2003/2004

Exercício teste 11 (a entregar na aula prática da semana de 8/12/2003)

Considere a superfície M definida por

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < z = 1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 \right\}.$$

(a) Calcule a massa de M sabendo que a sua densidade de massa é dada por

$$\sigma(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+4(1-z)}}.$$

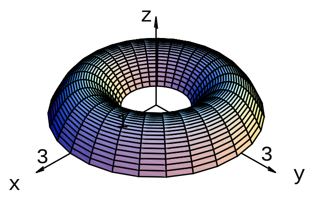
(b) Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z) = (-y, x, z-1)$. Calcule o fluxo de F através de M segundo a normal unitária que no ponto $(0,2,1)$ tem terceira componente positiva, usando

(i) a definição de fluxo;

(ii) o Teorema da Divergência.

Resolução:

(a) A superfície M encontra-se esboçada na seguinte figura:



Consideremos a seguinte parametrização de M:

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-(r-2)^2), \quad 1 < r < 3, \ 0 < \theta < 2\pi.$$

Então,

$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2(r-2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r(r-2)\cos\theta \\ 2r(r-2)\sin\theta \\ r \end{pmatrix},$$

e

$$||\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}|| = r\sqrt{4(r-2)^2+1}.$$

Assim, a massa de M é dada por

$$\begin{aligned} \int_M \sigma \, dS &= \int_0^{2\pi}\int_1^3 \sigma(g(r,\theta))\, ||\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}||\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+4(r-2)^2}}\, r\sqrt{4(r-2)^2+1}\, dr\, d\theta = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^3 = 8\pi. \end{aligned}$$

(b) Como

$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 2r(r-2)\cos\theta \\ 2r(r-2)\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

tem a terceira componente positiva, esta parametrização induz a normal com o sentido correcto. Assim o fluxo é dado por:

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot \nu \, dS &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} F(g(r,\theta)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \, d\theta \, dr \\
&= \int_1^3 \left(\int_0^{2\pi} (-r\sin\theta, r\cos\theta, -(r-2)^2) \cdot (2r(r-2)\cos\theta, 2r(r-2)\sin\theta, r) d\theta \right) dr \\
&= \int_1^3 \left(\int_0^{2\pi} -r(r-2)^2 d\theta \right) dr = 2\pi \int_1^3 -r^3 + 4r^2 - 4r \, dr \\
&= 2\pi \left[-\frac{r^4}{4} + 4\frac{r^3}{3} - 2r^2 \right]_1^3 = 2\pi(-\frac{81}{4} + 36 - 18 + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2) = -\frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Observe que div $F = 1$. Logo o Teorema da Divergência mostra que

$$\iiint_D \text{div } F = \iiint_D 1 = \int_M F \cdot \nu \, dS + \int_B F \cdot \nu \, dS,$$

onde B é a coroa anelar (tampa) que, conjuntamente com M, delimita a região $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 \}$, e ν é a normal unitária exterior a D.

Para calcular o fluxo através de B observe que a normal unitária em B é $\nu = (0,0,-1)$. Logo $F(x,y,z) \cdot \nu = 1 - z = 1$ em B e então

$$\int_B F \cdot \nu \, dS = \iint_B 1 = \text{área}(B) = \pi(3^2 - 1) = 8\pi.$$

Para calcular o volume de D temos

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(D) &= \iiint_D 1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^3 \left(\int_0^{1-(r-2)^2} r \, dz \right) dr \right) d\theta \\
&= 2\pi \int_1^3 r(1 - (r-2)^2) \, dr \\
&= 2\pi \int_1^3 -r^3 + 4r^2 - 3r \, dr = 2\pi \left[-\frac{r^4}{4} + 4\frac{r^3}{3} - 3\frac{r^2}{2} \right]_1^3 \\
&= 2\pi \left(-\frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{16\pi}{3}
\end{aligned}$$

Obtemos então,

$$\int_M F \cdot \nu \, dS = \iiint_D 1 - \int_B F \cdot \nu \, dS = -\frac{8\pi}{3}.$$