Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 11 (a entregar na semana de 23/05/2005)

Considere o campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,5,0)\} \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(x, y-5, z)}{||(x,y-5,z)||^3},$$

e considere os subvariedades

$$E_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 = 1\right\} \text{ e}$$
$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 = 1\right\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Mostre que o fluxo do campo $\mathbf{F}$, através de E_i, é $\pm 4\pi$ se $i = 1$ e nulo se $i = 0$.

Resolução:

Tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{||(x,y-5,z)||^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y-5}{||(x,y-5,z)||^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{||(x,y-5,z)||^3} \\
&= \frac{1}{||(x,y-5,z)||^3} - 3\frac{x^2}{||(x,y-5,z)||^5} + \frac{1}{||(x,y-5,z)||^3} - 3\frac{(y-5)^2}{||(x,y-5,z)||^5} \\
&\quad + \frac{1}{||(x,y,z)||^3} - 3\frac{z^2}{||(x,y-5,z)||^5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

O interior do elipsólido E_i, em que $i = 0, 1$ é o aberto

$$\Omega_i = \left\{(x, yz) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-i5}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 < 1\right\},$$

e $\partial\Omega_i = E_i$ tem um vector normal unitário

$$\nu_i(x,y,z) = \frac{\left(\frac{2}{9}x, \frac{y-i5}{2}, \frac{z}{8}\right)}{\| \left(\frac{2}{9}x, \frac{y-i5}{2}, \frac{z}{8}\right) \|}$$

No caso $i = 0$ o campo $\mathbf{F}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em Ω_0 e E_0. Aplicando o teorema da divergência obtém-se

$$\int_{E_0} \mathbf{F} \cdot \nu_0 = \int_{\Omega_0} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0.$$

No caso $i = 1$ considere a bola fechada $B(\epsilon) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-5)^2 + z^2 \leq \epsilon^2\}$ e o seu bordo $S(\epsilon) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-5)^2 + z^2 = \epsilon^2\}$, em que $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$. Se $\epsilon < 2$, tem-se $B(\epsilon) \subset \Omega_1$, e

$\mathbf{F}$ é um campo vectorial de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $\Omega_1 \setminus B(\epsilon)$. O bordo $\partial\big(\Omega_1 \setminus B(\epsilon)\big)$ é $E_1 \cup S(\epsilon)$, e o vector normal *exterior* unitário à fronteira é dado por

$$\nu(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{2}{9}x, \frac{y-i5}{2}, \frac{z}{8}\right)}{\|\left(\frac{2}{9}x, \frac{y-i5}{2}, \frac{z}{8}\right)\|} & \text{se } (x,y,z) \in E_1, \\ \\ -\frac{(x,y-5,z)}{\epsilon} & \text{se } (x,y,z) \in S(\epsilon). \end{cases}$$

Aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\Omega_1 \setminus B} \text{div } \mathbf{F} \\ &= \int\limits_{E_1 \cup S(\epsilon)} \mathbf{F} \cdot \nu = \int\limits_{E_1} \mathbf{F} \cdot \nu + \int\limits_{S(\epsilon)} \mathbf{F} \cdot \nu \\ &= \int\limits_{E_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 - \int\limits_{S(\epsilon)} \frac{(x,y-5,z)}{||(x,y-5,z)||^3} \cdot \frac{(x,y-5,z)}{\epsilon} \\ &= \int\limits_{E_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 - \int\limits_{S(\epsilon)} \frac{1}{\epsilon^2} \\ &= \int\limits_{E_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 - \frac{\text{área de } S(\epsilon)}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

Portanto $\int_{E_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 = 4\pi$. Utilizando o vector normal interior unitário $\mathbf{n}(x,y,z) = -\dfrac{\left(\frac{2}{9}x, \frac{y-5}{2}, \frac{z}{8}\right)}{\|\left(\frac{2}{9}x, \frac{y-5}{2}, \frac{z}{8}\right)\|}$ de E_1, obtém-se $\int_{E_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -4\pi$.