Análise Matemática III
1º semestre de 2003/2004

Exercício teste 12 (a entregar na aula prática da semana de 15/12/2003)

Considere a superfície (variedade-2)

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \,;\, y > 0 \,;\, z < 2\}$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = (2xz - x, y, -z^2).$$

Calcule o fluxo $\displaystyle\int_M F \cdot n \; dS$ no sentido da normal n que tem a terceira componente positiva, de duas formas distintas:

1. utilizando o Teorema da Divergência;
2. utilizando o Teorema de Stokes.

Resolução

1. Podemos considerar o conjunto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 < z < 2 \,;\, y > 0\},$$

que é um domínio regular e cuja fronteira é dada por

$$\partial D = M \cup T_1 \cup T_2,$$

onde

$$T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 2 \,;\, y > 0 \,;\, z = 2\}$$

e

$$T_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 \leq z \leq 2 \,;\, y = 0\}.$$

Visto que o campo F é de classe C^1 podemos usar o Teorema da Divergência e concluir que

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot n \; dS = \int_M F \cdot n \; dS + \int_{T_1} F \cdot n_1 \; dS + \int_{T_2} F \cdot n_2 \; dS,$$

onde n, n_1 e n_2 são normais exteriores à fronteira de D, em M, T_1 e T_2 respectivamente. Temos $\operatorname{div} F = 0$ logo o fluxo é dado por

$$\int_M F \cdot n \; dS = -\int_{T_1} F \cdot n_1 \; dS - \int_{T_2} F \cdot n_2 \; dS.$$

Note-se que $n_1 = (0,0,1)$ e que $F_{|T_1} = (3x, y, -4)$, portanto obtemos

$$\int_{T_1} F \cdot n_1 \; dS = -4 \, \text{área}(T_1) = -4\pi.$$

Por outro lado $n_2 = (0, -1, 0)$ e $F_{|T_2} = (2xz - x, 0, -z^2)$, logo

$$\int_{T_2} F \cdot n_2 \; dS = 0.$$

Donde podemos concluir que

$$\int_M F \cdot n \; dS = 4\pi.$$

A normal pedida no enunciado tem a terceira componente positiva, portanto é a normal interior à fronteira de D, logo o fluxo que pretendemos obter é dado por -4π.

2. Sabemos que $\operatorname{div} F = 0$ e o domínio de F é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, logo podemos concluir que existe um campo vectorial A, de classe C^1, tal que $\operatorname{rot} A = F$. Para determinar o campo A devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2xz - x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z^2. \end{cases}$$

Escolhendo $A_3 = 0$ obtemos

$$A_2(x, y, z) = xz - xz^2 + C_2(x, y),$$
$$A_1(x, y, z) = yz + C_1(x, y)$$

e substituindo na última equação temos

$$z - z^2 + \frac{\partial C_2}{\partial x} - (z + \frac{\partial C_1}{\partial y}) = -z^2,$$

logo podemos escolher $C_1 = C_2 = 0$ e obtemos $A(x, y, z) = (yz, xz(1 - z), 0)$.
Usando o Teorema de Stokes temos

$$\int_M F \cdot n \; dS = \int_M \operatorname{rot} A \cdot n \; dS = \int_{\partial M} A \cdot dg,$$

onde g é um parametrização da fronteira de M, percorrida no sentido compatível com a orientação de M dada pela normal n. Temos $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ onde

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 2 \,;\; z = 2 \,;\; y > 0\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 \,;\; y = 0 \,;\; -2 < x < 2\},$$

e usando a regra da mão direita concluimos que Γ_1 deve ser percorrida no sentido directo e Γ_2 no sentido crescente dos valores de x. Assim uma parametrização para Γ_1 é dada por

$$g_1(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, 2) \qquad 0 < t < \pi$$

e para Γ_2 é dada por

$$g_2(x) = (x, 0, x^2) \qquad -2 < x < 2.$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \int_M F \cdot n \; dS &= \int_{\partial M} A \cdot dg \\ &= \int_0^\pi A(g_1(t)) \cdot g_1'(t) \; dt + \int_{-2}^2 A(g_2(x)) \cdot g_2'(x) \; dx \\ &= \int_0^\pi (2\sqrt{2} \operatorname{sen} t, -2\sqrt{2} \cos t, 0) \cdot (-\sqrt{2} \operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t, 0) \; dt + \\ &\quad + \int_{-2}^2 (0, x^3(1 - x^2), 0) \cdot (1, 0, 2x) \; dx \\ &= \int_0^\pi -4 \operatorname{sen}^2 t - 4 \cos^2 t \; dt = -4\pi. \end{aligned}$$