

## Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

### Exercício-Teste 2 (a entregar na semana de 14/03/2005)

- 1) Um painel solar  $P$  tem uma forma rectangular,  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 15\}$  (os comprimentos estão em metros). O painel  $P$  é composto por 4 sub-painéis:

$$\begin{aligned}P_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 10, 0 \leq y < 10\}; \\P_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 10, 10 \leq y \leq 15\}; \\P_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 10 \leq x \leq 20, 0 \leq y < 10\}; \\P_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 10 \leq x \leq 20, 10 \leq y \leq 15\}.\end{aligned}$$

O sub-painel  $P_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , tem uma produção energética de  $5j \text{ W/m}^2$ .

Utilizando um integral múltiplo calcule a potência total (em Watt,  $W$ ) do painel  $P$ .

- 2) Determine se a espiral  $E \subset \mathbb{R}^3$  definida por

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos(z), y = \sin(z)\},$$

tem medida nula. Justifique cuidadosamente.

### Resolução:

- 1) A potência por metro quadrado é dada (em  $W/m^2$ ) pela função em escada  $s : P \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$s(x, y) = \begin{cases} 5, & (x, y) \in P_1 \\ 10, & (x, y) \in P_2 \\ 15, & (x, y) \in P_3 \\ 20, & (x, y) \in P_4. \end{cases}$$

A potência total é então dada por

$$\int_P s = 5V(P_1) + 10V(P_2) + 15V(P_3) + 20V(P_4) = 5 \times 100 + 10 \times 50 + 15 \times 100 + 20 \times 50 = 3500W.$$

- 2) A espiral  $E$  está contida no cilindro vertical infinito de raio 1,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\},$$

porque  $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$ .

A porção de  $A$  com  $y \geq 0$  tem medida nula pois é o gráfico da função contínua  $y = f(x, z) = \sqrt{1 - x^2}$ . A porção de  $A$  com  $y \leq 0$  também tem medida nula, pois é o gráfico da função  $y = g(x, z) = -\sqrt{1 - x^2}$ . Logo,  $A$  é a união de dois conjuntos de medida nula e tem então medida nula. Por outro lado,  $E \subset A$  pelo que  $E$  também tem medida nula.

Alternativamente, podemos mostrar este resultado de forma mais directa: o conjunto  $E$  é o gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $z \mapsto (\cos(z), \sin(z))$ . Sejam  $a < b$  números reais. A função contínua  $f$  é uniformemente contínua no intervalo compacto  $[a, b]$ ; logo, dado qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $z_1, z_2 \in [a, b]$  tem-se

$$|z_1 - z_2| < \delta \implies |\cos(z_1) - \cos(z_2)| < \epsilon \quad \text{e} \quad |\sin(z_1) - \sin(z_2)| < \epsilon.$$

Logo, o subconjunto  $E_{a,b} = \{(x, y, z) : a \leq z \leq b \text{ e } (x, y) = f(z)\}$  pode ser coberto por  $\frac{b-a}{\delta}$  paralelepípedos de volume  $\delta\epsilon^2$ , perfazendo um volume total de  $(b-a)\epsilon^2$ .

Segue que o subconjunto  $E_{a,b}$  tem medida nula. Como  $E$  é uma união numerável de subconjuntos da forma  $E_{a,b}$  obtém-se que  $E$  tem medida nula.