Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 2 (a entregar na semana de 14/03/2005)

1) Um painel solar P tem uma forma rectangular, $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 20, 0 \le y \le 15\}$ (os comprimentos estão em metros). O painel P é composto por 4 sub-paineis:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x < 10, 0 \le y < 10\}; \\ P_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x < 10, 10 \le y \le 15\}; \\ P_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 10 \le x \le 20, 0 \le y < 10\}; \\ P_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 10 \le x \le 20, 10 \le y \le 15\}. \end{aligned}$$

O sub-painel P_j, $j = 1,2,3,4$, tem uma produção energética de $5j\ W/m^2$.
Utilizando um integral múltiplo calcule a potência total (em Watt, W) do painel P.

2) Determine se a espiral $E \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos(z), y = \operatorname{sen}(z)\},$$

tem medida nula. Justifique cuidadosamente.

Resolução:

1) A potência por metro quadrado é dada (em W/m^2) pela função em escada $s : P \to \mathbb{R}$,

$$s(x,y) = \begin{cases} 5, & (x,y) \in P_1 \\ 10, & (x,y) \in P_2 \\ 15, & (x,y) \in P_3 \\ 20, & (x,y) \in P_4. \end{cases}$$

A potência total é então dada por

$$\int_P s = 5V(P_1) + 10V(P_2) + 15V(P_3) + 20V(P_4) = 5\times 100 + 10\times 50 + 15\times 100 + 20\times 50 = 3500W.$$

2) A espiral E está contida no cilindro vertical infinito de raio 1,

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\},$$

porque $\cos(z)^2 + \operatorname{sen}(z)^2 = 1$.

A porção de A com $y \ge 0$ tem medida nula pois é o gráfico da função contínua $y = f(x,z) = \sqrt{1-x^2}$. A porção de A com $y \le 0$ também tem medida nula, pois é o gráfico da função $y = g(x,z) = -\sqrt{1-x^2}$. Logo, A é a união de dois conjuntos de medida nula e tem então medida nula. Por outro lado, $E \subset A$ pelo que E também tem medida nula.

Alternativamente, podemos mostrar este resultado de forma mais directa: o conjunto E é o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $z \mapsto (\cos(z), \operatorname{sen}(z))$. Sejam $a < b$ números reais. A função contínua f é uniformemente contínua no intervalo compacto $[a,b]$; logo, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $z_1, z_2 \in [a,b]$ tem-se

$$|z_1 - z_1| < \delta \Longrightarrow |\cos(z_1) - \cos(z_2)| < \epsilon \quad \text{e} \quad |\operatorname{sen}(z_1) - \operatorname{sen}(z_2)| < \epsilon.$$

Logo, o subconjunto $E_{a,b} = \{(x,y,z) : a \le z \le b \text{ e } (x,y) = f(z)\}$ pode ser coberto por $\frac{b-a}{\delta}$ paralelipípedos de volume $\delta\epsilon^2$, perfazendo um volume total de $(b-a)\epsilon^2$.

Segue que o subconjunto $E_{a,b}$ tem medida nula. Como E é uma união numerável de subconjuntos da forma $E_{a,b}$ obtém-se que E tem medida nula.