Análise Matemática III
1º semestre de 2003/2004

Exercício teste 4 (a entregar na aula prática da semana de 13/10/2003)

Calcule o integral triplo dado por

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1-(x^2+z^2)} dy\,dz\,dx$$

usando coordenadas cilndricas.

Resolução
Temos

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-(x^2+z^2)}}^{1-(x^2+z^2)} dydzdx = \int_D 1,$$

onde

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+z^2<1, -\sqrt{1-(x^2+z^2)}<y<1-(x^2+z^2)\right\}.$$

Recorrendo à mudança para coordenadas cilíndricas, com Oy como eixo de simetria,

$$\begin{array}{rcl} g\ :]0,\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ g(\rho,\theta,y) & = & (\rho\cos(\theta),\ y,\ \rho\,\mathrm{sen}(\theta)) \end{array}$$

temos $\widetilde{D} = g(T)$, onde $\widetilde{D} = D\setminus\{(x,y,0);\ x\geq 0,\ y\in\mathbb{R}\}$ e

$$T = \left\{(\rho,\theta,y)\in\mathbb{R}^3 \ : \ 0<\theta<2\pi,\ 0<\rho<1,\ -\sqrt{1-\rho^2}<y<1-\rho^2\right\}.$$

Assim, atendendo a que $|det(Dg)| = \rho$ e que o conjunto $\{(x,y,0)\in D;\ x\geq 0,\ y\in\mathbb{R}\}$ tem medida nula, temos

$$\begin{array}{rcl} \int_D 1 = \int_{\widetilde{D}} 1 & = & \int_T \rho = \\ & = & \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{1-\rho^2} \rho\ dyd\rho d\theta = \\ & = & 2\pi\int_0^1 \rho\left[1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2}\right]d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 + \pi\int_0^1\sqrt{u}du = \\ & = & \frac{\pi}{2}+\pi\frac{2}{3}u^{3/2}|_0^1 = \\ & = & \frac{7}{6}\pi. \end{array} \qquad (1)$$