Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 4 (a entregar na semana de 4/04/2005)

1. Calcule o volume da região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 4 \,; 0 < z < x^2 + y^2\},$$

usando coordenadas cilíndricas.

2. Considere o sólido do exercício-teste 3:

$$E(a, b, c)^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \,; x \geq 0 \,; y \geq 0 \,; z \geq 0\},$$

onde a, b e c são constantes positivas. Calcule a massa do sólido $E(a, b, c)^+$ sabendo que a densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = xyz$, usando uma mudança de coordenadas apropriada.

Resolução

1. O sólido V é limitado por dois cilindros de raios 1 e 2, um parabolóide e o plano $z = 0$, como se pode ver na figura seguinte.

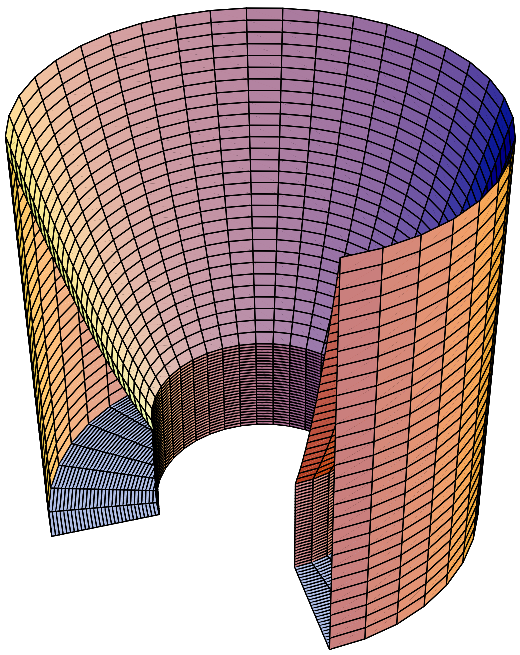

Figure 1: Esboço de parte da região V.

Recorrendo a uma mudança de coordenadas cilíndricas com $0z$ como eixo de simetria,

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z),$$

temos $X = g(T)$ onde $X = V \setminus \{(x, 0, z);\ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$ e

$$T = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 < \theta < 2\pi,\ 1 < \rho < 2,\ 0 < z < \rho^2\right\}.$$

Assim atendendo a que $|\det(Dg)| = \rho$ e que o conjunto $\{(x, 0, z);\ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$ tem medida nula, temos

$$\begin{aligned}
vol(V) &= \int_V 1 = \int_X 1 = \int_T \rho = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 d\theta = \\
&= 2\pi(4 - \frac{1}{4}) = \frac{15}{2}\pi.
\end{aligned}$$

2. Sabemos que esta região está contida no 1º octante e é limitada pelos planos coordenados e um elipsóide. Assim devemos considerar a seguinte mudança de coordenadas adaptadas das coordenadas esféricas

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$$
$$g(r, \theta, \phi) = (ar \operatorname{sen}\phi \cos\theta, br \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, cr \cos\phi).$$

Temos $X = g(T)$ onde $X = E(a, b, c)^+ \setminus \{(x, 0, z);\ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$ e

$$T = \left\{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3\ ,:\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < r < 1,\ 0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

O valor absoluto do jacobiano desta mudança de coordenadas é $|\det(Dg)| = abcr^2 \operatorname{sen}\phi$. Atendendo novamente a que o conjunto $\{(x, 0, z);\ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$ tem medida nula, a massa do sólido é dada por

$$\begin{aligned}
M &= \int_{E(a,b,c)^+} xyz \, dx \, dy \, dz = \int_X xyz \, dx \, dy \, dz = \\
&= \int_T (abc)^2 r^5 \operatorname{sen}^3\phi \cos\phi \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\phi \, d\theta = \\
&= (abc)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \operatorname{sen}^3\phi \cos\phi \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, d\theta = \\
&= \frac{(abc)^2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\operatorname{sen}^4\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \\
&= \frac{(abc)^2}{24} \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{(abc)^2}{48}.
\end{aligned}$$