Análise Matemática III
1º semestre de 2003/2004

Exercício teste 5 (a entregar na aula prática da semana de 20/10/2003)

Considere o caminho dado por

$$\begin{array}{rcl} g \ : \ [0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ g(t) & = & (t^2 cos(t), t^2 sen(t), 2t) \end{array}$$

e a curva C por ele representada.

a) Determine o comprimento, L, de C.

b) Determine a coordenada $\overline{z}$ do centróide (= centro de massa se a densidade de massa for constante) de C.

c) Suponha agora que C tem uma densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = 2z$. Determine a massa, M, e a coordenada z_{CM} do centro de massa de C. Diga, qualitativamente, porque razão z_{CM} é maior do que $\overline{z}$.

d) Determine o momento de inércia, I_z, de C em relação ao eixo Oz.

Resolução

a) O comprimento é dado pela expressão

$$L = \int_C 1 = \int_0^1 ||g'(t)||dt \tag{1}$$

A derivada de g é

$$g'(t) = (2tcos(t) - t^2 sen(t), 2tsen(t) + t^2 cos(t), 2)$$

pelo que a sua norma é a função escalar

$$\begin{aligned} ||g'(t)|| &= \sqrt{4t^2cos^2(t) - 4t^3cos(t)sen(t) + t^4sen^2(t) + 4t^2sen^2(t) + 4t^3cos(t)sen(t) + t^4cos^2(t) + 4} \\ &= \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4} = t^2 + 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo em (1) obtemos o comprimento

$$L = \int_0^1 (t^2 + 2)dt = \left[\frac{t}{3}^3 + 2t\right]_0^1 = \frac{7}{3}.$$

b) Para a coordenada $\overline{z}$ do centróide temos

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{L}\int_C z = \\ &= \frac{3}{7}\int_0^1 2t(t^2 + 2)dt = \\ &= \frac{3}{7}\left[\frac{1}{2}t^4 + 2t^2\right]_0^1 = \frac{15}{14} \cong 1.07. \end{aligned}$$

c) A coordenada z_{CM} do centro de massa é dada por

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int_C z\sigma, \tag{3}$$

onde M é a massa do corpo dada por

$$M = \int_C \sigma = \int_0^1 \sigma(x(t), y(t), z(t))||g'(t)||dt. \tag{4}$$

Substituindo (2) em (4) obtemos a massa

$$M = \int_0^1 4t(t^2+2)dt = \left[t^4 + 4t^2\right]_0^1 = 5.$$

Para a coordenada z_{CM} do centro de massa temos então

$$\begin{aligned} z_{CM} &= \frac{1}{M}\int_C z\sigma = \frac{2}{5}\int_C z^2 = \\ &= \frac{2}{5}\int_0^1 4t^2(t^2+2)dt = \\ &= \frac{2}{5}\left[\frac{4}{5}t^5 + \frac{8}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{104}{75} \cong 1.39 \ > \ \overline{z}. \end{aligned}$$

A coordenada z_{CM} do centro de massa de C é maior do que a coordenada $\overline{z}$ do seu centróide porque a densidade de massa cresce com z. A coordenada $\overline{z}$ é a média de z pelos pontos de C enquanto que z_{CM} é uma média da mesma coordenada mas com uma ponderação que depende da densidade de massa. Assim, pontos com uma maior densidade de massa "contribuem" mais para z_{CM} do que pontos com uma densidade de massa menor. Para $\overline{z}$ a contribuição de todos os pontos é igual.

d) O momento de inércia em relação ao eixo Oz é

$$I_z = \int_C d^2(x,y,z)\sigma(x,y,z),$$

onde $d(x,y,z)$ é a distância do ponto (x,y,z) ao eixo Oz, $d = \sqrt{x^2+y^2}$. Temos então

$$I_z = \int_C (x^2+y^2)2z = \int_0^1 t^4 \ 4t \ (t^2+2)dt = \left[\frac{1}{2}t^8 + \frac{4}{3}t^6\right]_0^1 = \frac{11}{6}.$$