Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 6 (a entregar na semana de 18/04/2005)

Considere o campo vectorial

$$f(x, y, z) = (e^{y+z} - \frac{z}{x^2 + z^2}, \, xe^{y+z}, \, xe^{y+z} + \frac{x}{x^2 + z^2}).$$

Calcule o integral de linha de f ao longo da espiral elíptica parametrizada por $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, com

$$g(\theta) = (2\cos\theta, \, \theta, \, 5\operatorname{sen}\theta).$$

Justifique o cálculo cuidadosamente. Diga se f é ou não um gradiente no seu domínio.

Resolução:

Vamos escrever o campo f na forma $f = h + l$ com $h(x, y, z) = (-\frac{z}{x^2+z^2}, \, 0, \, \frac{x}{x^2+z^2})$ e $l(x, y, z) = (e^{y+z}, \, xe^{y+z}, \, xe^{y+z})$.

O campo l tem por domínio todo o $\mathbb{R}^3$ e é um campo fechado. Logo, é um gradiente. Facilmente verificamos que $l = \nabla\phi$ com $\phi(x, y, z) = xe^{y+z}$. Temos então,

$$\int l \, dg = \int \nabla\phi \, dg = \phi(g(2\pi)) - \phi(g(0)) = \phi(2, 2\pi, 0) - \phi(2, 0, 0) = 2e^{2\pi} - 2.$$

Como deverá ser conhecido das aulas teóricas e práticas, o campo vectorial h é fechado (o que se verifica facilmente), mas não é um gradiente no seu domínio $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo dos y}\}$. De facto, se tomarmos, por exemplo, a circunferência C definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, \, y = 0\},$$

e se α for uma parametrização de C que tem o sentido horário para um observador colocado no ponto $(0, 1, 0)$, então

$$\oint h d\alpha = 2\pi.$$

Podemos desde já concluir que f <u>não é um gradiente no seu domínio $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo dos y}\}$</u>, pois

$$\oint f d\alpha = \oint l \, d\alpha + \oint h \, d\alpha = \oint \nabla\phi \, d\alpha + 2\pi = 2\pi \neq 0.$$

Para calcular $\int f \, dg$ resta-nos então calcular $\int h \, dg$.

Notemos que a componente segundo y do campo h é nula e que, além disso, o campo h não depende da variável y. Então, o trabalho de h ao longo do caminho g vai ser igual ao trabalho de h ao longo da projecção desta espiral no plano xz, que podemos parametrizar por $\tilde{g}(\theta) = (2\cos\theta, \, 0, \, 5\operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Então, $\tilde{g}$ vai parametrizar a elipse no plano xz dada por

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, \, \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1\}.$$

Ora, podemos deformar a elipse E na circunferência C e facilmente se verifica que o caminho $\tilde{g}$ é homotópico ao caminho α. Como h é um campo fechado, temos

$$\int h \, dg = \oint h \, d\tilde{g} = \oint h \, d\alpha = 2\pi.$$

(De modo equivalente, podemos utilizar o teorema de Green no plano xz, aplicado à região limitada pela elipse E e pela circunferência C.) Logo,

$$\int f \, dg = \int l \, dg + \int h \, dg = 2e^{2\pi} - 2 + 2\pi.$$