Análise Matemática III
1º semestre de 2003/2004

Exercício Teste 7 (a entregar na semana de 3/11/2003)

Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$ definido por $F = G + H + I$ com

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \left(-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right), \\ H(x,y) &= (x^2+y^2)\,(x,y)\,, \\ I(x,y) &= \left(2xy+y^2, (x+y)^2\right). \end{aligned}$$

a) Determine se F é um campo fechado.

b) Será F um campo gradiente?

c) Calcule

$$\int_C (H+I)\cdot dg,$$

onde g é um caminho regular que une o ponto $(0,-1)$ ao ponto $(0,1)$.

Resolução

a) O campo vectorial $F = (F_1, F_2)$, com

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{y}{(x-1)^2+y^2} + (x^2+y^2)x + 2xy + y^2 \\ F_2 &= \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + (x^2+y^2)y + (x+y)^2, \end{aligned}$$

é um campo fechado. Com efeito,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y^2-(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} + 2xy + 2x + 2y = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Note que os campos vectoriais G, H e I são também campos fechados.

b) Se o campo F fosse um gradiente, o integral de linha de F ao longo de qualquer caminho fechado seria zero. No entanto, se considerarmos a circunferência C de centro no ponto $(1,0)$ e raio um, parametrizada por exemplo por $g(\theta) = (1+\cos\theta, \sin\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, temos

$$\begin{aligned} \int_C F\cdot dg &= \int_C (G+H+I)\cdot dg = \int_C G\cdot dg + \int_C H\cdot dg + \int_C I\cdot dg = \\ &= \int_0^{2\pi} G(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta + 0 = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Note que $\int_C H\cdot dg = \int_C I\cdot dg = 0$ pois H e I são gradientes (os campos H e I são fechados em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ é um **conjunto em estrela**).

Como $\int_C F\cdot dg \neq 0$, conclui-se que o campo F não é um gradiente.

c) Tal como foi referido na alínea anterior os campos H e I são gradientes. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha,

$$\int_C (H+I)\cdot dg = \int_C H\cdot dg + \int_C I\cdot dg,$$

depende apenas dos pontos inicial e final do caminho e

$$\begin{aligned}\int_C H \cdot dg &= \phi_1(0,1) - \phi_1(0,-1)\\ \int_C I \cdot dg &= \phi_2(0,1) - \phi_2(0,-1),\end{aligned}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são potenciais de H e de I respectivamente.

O campo H é um campo radial da forma $H(x,y) = \frac{f(r)}{r}(x,y)$ com $f(r) = r^3$ e $r = \sqrt{x^2+y^2}$, pelo que um potencial é dado facilmente por

$$\phi_1(x,y) = V(\sqrt{x^2+y^2}),$$

com $V(r) = \int f(r)dr = r^4/4$. Isto é, $\phi_1(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{4}$.

Para o campo $I = (I_1, I_2)$ temos

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = I_1 = 2xy + y^2,$$

pelo que $\phi_2 = x^2y + xy^2 + A(y)$ e

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = x^2 + 2xy + A'(y).$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = I_2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

pelo que $A'(y) = y^2$ e então $A(y) = y^3/3 + K$ com $K \in \mathbb{R}$. Assim, um potencial para I é, por exemplo, $\phi_2 = x^2y + xy^2 + \frac{y^3}{3}$.

Conclui-se que

$$\int_C H \cdot \, dg = \phi_1(0,1) - \phi_1(0,-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\int_C I \cdot \, dg = \phi_2(0,1) - \phi_2(0,-1) = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3},$$

e então $\int_C (H+I) \cdot dg = \int_C H \cdot dg + \int_C I \cdot dg = \frac{2}{3}$.

Nota: Alternativamente, como o campo $H + I$ é um gradiente, sabemos (pelo Teorema fundamental do Cálculo) que o integral de $H + I$ ao longo de C é igual ao integral ao longo do segmento de recta com os mesmos pontos inicial e final, ou seja, o segmento de recta parametrizado por:

$$g(t) = (0,t), \;\; t \in [-1,1].$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_C (H+I) \cdot \, dg &= \int_{-1}^{1} (H+I)(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (t^2, t^2+t^3) \cdot (0,1)\, dt\\ &= \int_{-1}^{1} t^2 + t^3\, dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$