Análise Matemática III
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2003/2004

Exercício teste 8 (a entregar na aula prática da semana de 17/10/2003)

1. Considere a seguinte aplicação diferenciável de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = (\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy), \mathrm{e}^{x^2-y^2}\,\mathrm{sen}(2xy)) \ .$$

   (a) Mostre que g tem uma inversa local em todos os pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (b) Será que g é invertível numa vizinhança do ponto $(x,y) = (0,0)$?

2. Considere o sistema

$$\begin{cases} y^2 + v^2 - 2xu = 0 \\ y^3 + v^4 + x^3 - u^3 = 0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que o sistema anterior determina (x,u) como funções de classe C^1 de (y,v) numa vizinhança do ponto $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,-1,1,1)$.

   (b) Calcule a derivada $\dfrac{\partial u}{\partial y}(-1,1)$.

Resolução:

1.(a) A função g é de classe C^1 no seu domínio. Assim, invocando o Teorema da Função Inversa, podemos determinar os pontos em que g é localmente invertível verificando apenas a condição: $\det Dg(x,y) \neq 0$.

Temos

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2}\,\mathrm{sen}(2xy) & -2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2xe^{x^2-y^2}\,\mathrm{sen}(2xy) \\ 2xe^{x^2-y^2}\,\mathrm{sen}(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) & -2ye^{x^2-y^2}\,\mathrm{sen}(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) \end{bmatrix}$$

$$= 2e^{x^2-y^2}\begin{bmatrix} x\cos(2xy) - y\,\mathrm{sen}(2xy) & -(y\cos(2xy) + x\,\mathrm{sen}(2xy)) \\ x\,\mathrm{sen}(2xy) + y\cos(2xy) & -(y\,\mathrm{sen}(2xy) - x\cos(2xy)) \end{bmatrix}.$$

Portanto obtemos

$$\begin{aligned} \det Dg(x,y) &= \left(2e^{x^2-y^2}\right)^2 [-2xy\cos(2xy)\,\mathrm{sen}(2xy) + x^2\cos^2(2xy) + y^2\,\mathrm{sen}(2xy) \\ &\quad -(-2xy\cos(2xy)\,\mathrm{sen}(2xy) - x^2\,\mathrm{sen}^2(2xy) - y^2\cos^2(2xy))] \\ &= 4e^{2(x^2-y^2)}(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Como o determinante é diferente de zero em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ excepto na origem, podemos concluir que g tem inversa local em todos esses pontos.

1.(b) Vamos tentar determinar se g é ou não injectiva numa vizinhança da origem. Como

$$g(-x,-y) = (\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy), \mathrm{e}^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)) = g(x,y),$$

podemos concluir que g não pode ser invertível em nenhuma vizinhança da origem.

2.(a) Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x,y,u,v) = (y^2 + v^2 - 2xu, y^3 + v^4 + x^3 - u^3).$$

Trata-se de uma função de classe C^1 pelo que o Teorema da Função Implícita garante a existência de funções $x(y,v)$ e $u(y,v)$ desde que $F(1,-1,1,1) = (0,0)$ e

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x,u)}(1,-1,1,1) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{|(1,-1,1,1)} \neq 0.$$

Como

$$\det \begin{bmatrix} -2u & -2x \\ 3x^2 & -3u^2 \end{bmatrix}_{|(1,-1,1,1)} = \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = 12,$$

conclui-se que existe uma vizinhança V do ponto $(y,v) = (-1,1)$ e duas funções $x,u : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $x(-1,1) = 1$ e $u(-1,1) = 1$. Para além disso temos $F(x(y,v),y,u(y,v),v) = (0,0)$ numa vizinhança do ponto $(1,-1,1,1)$.

2.(b) Da equação $F(x(y,v),y,u(y,v),v) = (0,0)$, derivando em ordem a y, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -2u\frac{\partial x}{\partial y} + 2y - 2x\frac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \\ 3x^2\frac{\partial x}{\partial y} + 3y^2 - 3u^2\frac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right.$$

Calculando estas derivadas no ponto $(y,v) = (-1,1)$, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

donde se conclui que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(-1,1) = 0.$$