Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 8 (a entregar na semana de 2/05/2005)

1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 2 \\ \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ onde este sistema tem uma solução única.

2. Considere a seguinte equação

$$z + e^{x+zy^2} = 1.$$

(a) Mostre que a equação define z como função de x, y numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$.

(b) Calcule as derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1); \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1).$$

Resolução

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y) = \left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2, \operatorname{sen} x + \cos y\right).$$

Trata-se de uma função de classe C^1 que verifica $F(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (2, 1)$, logo o ponto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é uma solução do sistema de equações. O Teorema da Função Inversa garante que na vizinhança da solução $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ temos uma solução única desde que $\det DF(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \neq 0$.

De facto, temos

$$DF(x,y) = \begin{bmatrix} -2\frac{y^2}{x^3} & 2\frac{y}{x^2} \\ \cos x & -\operatorname{sen} y \end{bmatrix}$$

Portanto no ponto $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ obtemos

$$DF(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e $\det DF(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi} \neq 0$. Concluimos então que F é invertível numa vizinhança deste ponto e portanto o sistema tem uma solução única numa vizinhança deste ponto.

(a) Seja $F(x, y, z) = z + e^{x+zy^2} - 1$. Note-se que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $F(0, 1, 0) = 0$. Para além disso temos

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,0) = (1 + e^{x+zy^2})_{|(0,1,0)} = 2 \neq 0.$$

Portanto, pelo teorema da função implícita existe uma vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$ em que z se pode exprimir como função de x, y para os pontos em que $F(x, y, z) = 0$.

(b) Fazendo $z = z(x, y)$ e derivando a equação $F(x, y, z(x, y)) = 0$ em ordem a x obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 0) + \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 0)\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 0$$

e, portanto

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = -\frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo, derivando a equação $F(x, y, z(x, y)) = 0$ em ordem a y obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0.$$