Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 11 (a entregar na aula prática da semana de 2/6/2003)

Considere a superfície (2-variedade):

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = x^2, 1 < x < 2\},$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = (2x, -y, -z).$$

Calcule o fluxo $\int_S F \cdot \nu$ segundo a direcção da normal ν que tem primeira componente negativa, de três formas distintas:

(a) pela definição de fluxo;

(b) utilizando o Teorema da Divergência;

(c) utilizando o Teorema de Stokes.

Resolução

(a) A superfície S é uma superfície de revolução em torno do eixo $0x$. Em coordenadas cilíndricas apropriadas (ρ, θ, x), S é definida por $\rho = x$ com $1 < x < 2$, logo S é um cone, que se pode ver na figura seguinte:

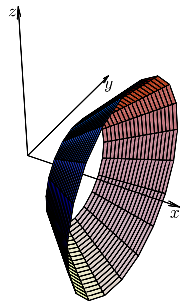

Figura 1: A superfície S

Uma parametrização para S é dada por

$$g(\theta, x) = (x, x\cos\theta, x \operatorname{sen}\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi, \ 1 < x < 2.$$

Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 0 & -x \operatorname{sen}\theta & x\cos\theta \\ 1 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = (-x, x\cos\theta, x\operatorname{sen}\theta).$$

Quando x é positivo, a primeira componente de $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial g}{\partial x}$ é negativa, portanto este vector tem o sentido da normal pedida à superfície. Conclui-se que

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot n\, dS &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 F(g(\theta, x)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (2x, -x\cos\theta, -x \operatorname{sen}\theta) \cdot (-x, x\cos\theta, x\operatorname{sen}\theta)\, dx\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 -3x^2\, dx\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [-x^3]_1^2\, d\theta = 2\pi(-8+1) = -14\pi.
\end{aligned}$$

(b) F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ logo podemos aplicar o Teorema da Divergência à região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < x^2,\ 1 < x < 2\}.$$

A fronteira de D é formada por S e pelos dois discos

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1\,, x = 1\} \ \text{ e } \ S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 4\,, x = 2\}.$$

Uma vez que a normal a S dada, n, é a normal exterior a D, o teorema da divergência diz que

$$\int_D \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int_S F \cdot n\, dS + \int_{S_1} F \cdot n_1\, dS + \int_{S_2} F \cdot n_2\, dS$$

onde $n_1 = (-1, 0, 0)$ e $n_2 = (1, 0, 0)$ são as normais aos discos S_1 e S_2, respectivamente. Como

$$\operatorname{div} F = 2 - 1 - 1 = 0$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot n\, dS &= -\int_{S_1} F \cdot n_1\, dS - \int_{S_2} F \cdot n_2\, dS \\
&= -\int_{S_1} -2x\, dS - \int_{S_2} 2x\, dS \\
&= -\int_{S_1} -2\, dS - \int_{S_2} 4\, dS \\
&= 2\text{área}(S_1) - 4\text{área}(S_2) = 2\pi - 16\pi = -14\pi.
\end{aligned}$$

(c) Uma vez que F é solenoidal (isto é, $\operatorname{div} F = 0$) e o domínio de F é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluimos que F é um rotacional. Para achar um potencial vector A temos de resolver o sistema

$$\operatorname{rot} A = F \iff \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = (2x, -y, -z)$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z \end{cases}$$

Fazendo, por exemplo, $A_1 = 0$ obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = -z \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ A_3(x,y,z) = yx + C_3(y,z) \\ A_2(x,y,z) = -zx + C_2(y,z) \end{cases}$$

Substituindo na primeira equação obtemos

$$x + \frac{\partial C_3}{\partial y}(y,z) + x - \frac{\partial C_2}{\partial z}(y,z) = 2x$$

pelo que podemos fazer $C_2(y,z) = C_3(y,z) = 0$. Conclui-se que um potencial vector para F é dado por

$$A(x,y,z) = (0, -zx, yx).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S F \cdot n\, dS = \int_S \operatorname{rot} A \cdot n\, dS = \oint_{\partial S} A \cdot\, d\gamma.$$

O bordo de S é contituído por duas curvas:

$$\Gamma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1,\, x = 1\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4,\, x = 2\}.$$

de acordo com a regra da mão direita, Γ_1 deve ser percorrida no sentido directo e Γ_2 no sentido horário.

Uma parametrização de Γ_1 é

$$\gamma_1(t) = (1, \cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 < t < 2\pi$$

e uma parametrização para Γ_2 é

$$\gamma_2(t) = (2, 2\cos t, -2\operatorname{sen} t), \quad 0 < t < 2\pi,$$

que percorrem as curvas no sentido desejado. Assim,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n\, dS &= \oint_{\Gamma_1} A \cdot\, d\gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} A \cdot\, d\gamma_2 \\ &= \int_0^{2\pi} (0, -\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (0, -\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\ &+ \int_0^{2\pi} (0, 4\operatorname{sen} t, 4\cos t) \cdot (0, -2\operatorname{sen} t, -2\cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} 8\ dt = -14\pi. \end{aligned}$$