Análise Matemática III
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2002/2003

Exercício Teste 3 (a entregar na semana de 24/3/2003)

1. Esboce a região
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 4 \; ; \; x < 1\}$$
e calcule a abcissa do respectivo centróide usando coordenadas apropriadas.

2. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume da região
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1 \; ; \; x^2 + y^2 - 1 < z < 3\}.$$

Resolução:

1. A abcissa do centróide de R é dada por
$$x_R = \frac{\int_R x dx dy}{\int_R dx dy}$$
Esboçando essa região temos

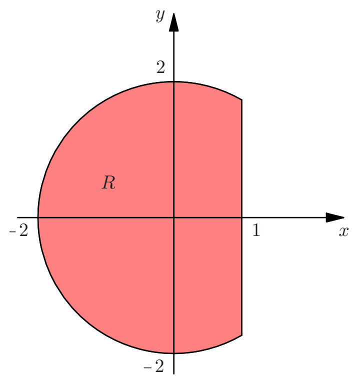

Figura 1: A região R

A recta $x = 1$ intersecta a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ nos pontos $(1, \sqrt{3})$ e $(1, -\sqrt{3})$ e, se considerarmos as semi-rectas com origem em $(0, 0)$ e passando por esses pontos de intersecção, verificamos que R fica decomposto em dois domínios, R_1 e R_2,
$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \; ; \; -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\} \\ R_2 &= R \setminus R_1 \end{aligned}$$
como se representa na figura 2.

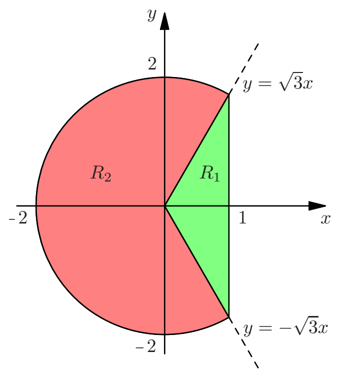

Figura 2: Decomposição de R em dois domínios R_1 e R_2

A geometria destes domínios sugere para R_1 o uso de coordenadas cartesianas e para R_2 o de coordenadas polares.

A mudança para coordenadas polares é definida por

$$(x, y) = g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) \ ; \ \rho > 0 \ , \ 0 < \theta < 2\pi$$

sendo

$$|\det Dg(\rho, \theta)| = \rho$$

A região R_2 é a imagem, por esta transformação, do conjunto

$$T_2 = g^{-1}(R_2) = \{(\rho, \theta) : 0 < \rho < 2 \ , \ \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}\}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\int_R x dx dy &= \int_{R_1} x dx dy + \int_{R_2} x dx dy \\
&= \int_0^2 \int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} x dy dx + \int_{\pi/3}^{5\pi/3} \int_0^2 \rho^2 \cos\theta \, d\rho d\theta \\
&= -2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_R dx dy &= \int_{R_1} dx dy + \int_{R_2} dx dy \\
&= \int_0^1 \int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} dy dx + \int_{\pi/3}^{5\pi/3} \int_0^2 \rho \, d\rho d\theta \\
&= \sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$x_R = -\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + 8\pi}.$$

Note-se que, dada a simetria de R em relação ao eixo Ox, ter-se-ia obviamente $y_R = 0$.

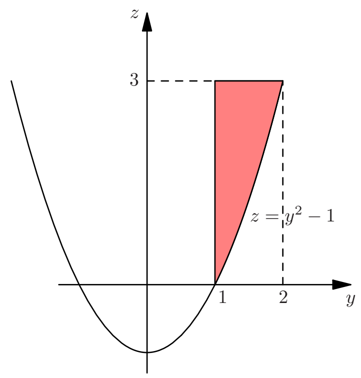

Figura 3:

2. O sólido D tem simetria axial em relação ao eixo Oz, correspondendo a uma revolução de 360 graus em torno deste eixo da região plana que se esboça na figura 3.

   É natural, portanto, recorrer a uma mudança para coordenadas cilíndricas,

$$(x, y, z) = g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z)$$
$$\rho > 0\ ;\ 0 < \theta < 2\pi\ ;\ z \in \mathbb{R}$$

   Sendo $T = g^{-1}(D)$, tem-se

$$T = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 - 1 < z < 3\ ;\ 1 < \rho < 2\ ;\ 0 < \theta < 2\pi\}$$

   e, portanto, o volume de D é dado por

$$\begin{aligned} \int_D dxdydz = \int_T \rho\ d\rho d\theta dz &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{\rho^2-1}^3 \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho(4 - \rho^2) d\rho d\theta \\ &= \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$