Análise Matemática III
2º semestre de 2002/2003

Exercício Teste 4 (a entregar na semana de 31/3/2003)

1. Calcule o integral

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$$

em que D é a região definida por

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4 \ ; \ \frac{x}{\sqrt{3}} < y < \sqrt{3}\, x \ ; \ z > \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$$

2. Calcule o comprimento da linha Γ definida por

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2 \ ; \ y = x^2+z^2\}$$

Resolução:

1. Na figura 1 encontra-se representada a região D.

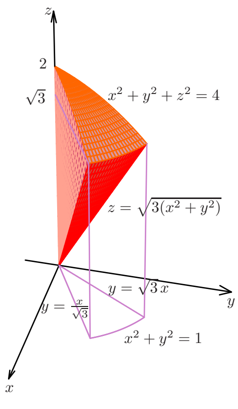

Figura 1: A região D

A função integranda $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sugere a mudança para coordenadas esféricas. A mudança para coordenadas esféricas é dada por

$$g(r,\theta,\phi) = (x,y,z) = (r \operatorname{sen}\phi \cos\theta, r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, r\cos\phi)$$

e o jacobiano da transformação é

$$J = \det Dg(r,\theta,\phi) = -r^2 \operatorname{sen}\phi$$

Da desigualdade $\frac{x}{\sqrt{3}} < y < \sqrt{3}\,x$, resulta

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$$

A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e o cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ intersectam-se segundo a circunferência descrita por

$$x^2 + y^2 = 1 \; ; \; z = \sqrt{3}$$

e, portanto, obtemos

$$0 < \phi < \frac{\pi}{6}$$

Dado que a esfera tem raio 2, é claro que

$$0 < r < 2$$

Portanto,

$$T = g^{-1}(D) = \{(r, \theta, \phi) : 0 < r < 2 \; ; \; \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3} \; ; \; 0 < \phi < \frac{\pi}{6}\}$$

e, pelo teorema da mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz &= \int_T r^3 \operatorname{sen}\phi \, drd\theta d\phi \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 r^3 \operatorname{sen}\phi \, drd\phi d\theta \\
&= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\theta \\
&= 4(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})\frac{\pi}{6} \\
&= (2 - \sqrt{3})\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

2. A linha Γ resulta da intersecção de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e do parabolóide $y = x^2 + z^2$ tal como se representa na figura 2.

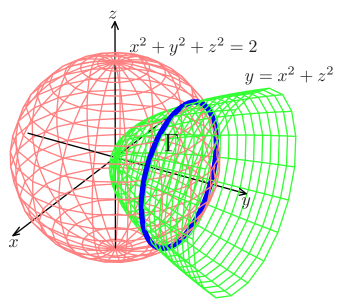

Figura 2: A linha Γ

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = x^2 + z^2 \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

ou seja, a linha Γ é uma circunferência no plano vertical $y = 1$, de raio 1 e de centro no ponto $(0, 1, 0)$. Assim, uma representação paramétrica para Γ pode ser dada pela função $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, 1, \operatorname{sen}\theta)$$

Portanto,

$$\| \gamma'(\theta) \| = \| (-\operatorname{sen}\theta, 0, \cos\theta) \| = 1$$

e o comprimento de Γ será dado por

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \| \gamma'(\theta) \| \, d\theta = 2\pi.$$