Análise Matemática III
2º semestre de 2002/2003

Exercício Teste 5 (a entregar na semana de 7/4/2003)

1. Considere a linha C que tem a configuração da intersecção das superfícies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{4x^2+2y^2}\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z+y=1\}$$

Sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{1+14x^2}$, calcule a massa de C.

2. Indique se o campo vectorial

$$F(x,y,z) = (ye^{xy}, xe^{xy}, z)$$

é gradiente no seu domínio de definição. Calcule

$$\int_\Gamma F \cdot dg$$

onde Γ é o arco de hipérbole definida por $z=2$ e $x^2-y^2=1$, desde o ponto $(1,0,2)$ até ao ponto $(\sqrt{2},1,2)$.

Resolução

1. A massa do fio é dada pelo integral de linha

$$m = \int_C \rho.$$

Para calcular este integral de linha precisamos de determinar uma parametrização para a curva C. Comecemos por determinar a equação da projecção, C', de C no plano xOy:

$$\begin{cases} z = \sqrt{4x^2+2y^2} \\ z+y=1 \end{cases} \Rightarrow \quad 4x^2+2y^2 = (1-y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2+(y+1)^2 = 2$$

Portanto a projecção C' é uma elipse centrada no ponto $(0,-1,0)$ com eixo maior de comprimento $\sqrt{2}$ e eixo menor de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Uma parametrização para C pode ser definida por

$$g(\theta) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, -1+\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, 2-\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta),\ \theta \in [0,2\pi],$$

onde estamos a usar o facto de que, quando θ percorre o intervalo $[0,2\pi]$, o caminho $(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, -1+\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, 0)$ percorre a projecção C' e que o único ponto de C por cima de $(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, -1+\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, 0)$ tem coordenada z dada por

$$z = 1-y(\theta) = 1-(-1+\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta) = 2-\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta.$$

Temos

$$g'(\theta) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\cos\theta, -\sqrt{2}\cos\theta)$$

$$\| g'(\theta) \| = \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta + 2\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+7\cos^2\theta}$$

$$\rho(g(\theta)) = \sqrt{1 + 14\frac{1}{2}\cos^2\theta} = \sqrt{1+7\cos^2\theta}$$

logo

$$\begin{aligned} m = \int_0^{2\pi} \rho(g(\theta)) \| g'(\theta) \| \, d\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+7\cos^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} 1 + 7\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\theta + 7\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= 9\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \end{aligned}$$

2. O domínio de definição de F é $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto em estrela, logo para que F seja gradiente é suficiente que seja fechado:

$$\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(ye^{xy}) = \; 0 \; = \frac{\partial}{\partial x}(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(xe^{xy}) = \; 0 \; = \frac{\partial}{\partial y}(z)$$

Logo F é fechado e portanto é um campo gradiente.

Para determinar um potencial ϕ para F temos as equações:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ye^{xy}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = z$$

Da primeira obtemos,

$$\phi(x,y,z) = e^{xy} + C(y,z)$$

Substituindo ϕ na segunda,

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = 0 \Leftrightarrow C(y,z) = D(z)$$

e finalmente da terceira equação obtemos

$$D'(z) = z \Leftrightarrow D(z) = \frac{z^2}{2} + K$$

Portanto o potencial tem a forma

$$\phi(x, y, z) = e^{xy} + \frac{z^2}{2} + K$$

onde K é uma constante.

Finalmente, usando o teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\int_\Gamma F \cdot dg = \phi(\sqrt{2}, 1, 2) - \phi(1, 0, 2) = e^{\sqrt{2}} - 1$$