# Análise Matemática III
# $2^{\underline{o}}$ semestre de 2002/2003

**Exercício Teste 6** (a entregar na semana de 28/4/2003)

1. Chama-se campo radial (em $\mathbb{R}^3$) a um campo vectorial da forma

$$F(x,y,z) = g(r)\,(x,y,z)$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $g$ é uma função real de variável real.

(a) Admitindo que $g$ é contínua num intervalo $[a,b]$, com $0 < a < b$, prove que $F$ é conservativo na região definida pela condição

$$a^2 < x^2+y^2+z^2 < b^2.$$

(b) Considere o campo

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,(x,y,z)$$

Determine um potencial escalar de $F$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ e calcule o trabalho realizado pelo campo $F$ ao longo do segmento de recta unindo o ponto $(1,1,1)$ ao ponto $(2,-1,1)$.

2. Recorra ao Teorema de Green para calcular

$$\int_C xy^2dx + 2x^2ydy$$

onde $C$ é a elipse de equação $4x^2+9y^2=36$ e orientada positivamente.

## Resolução

1. (a) Tem-se

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Por outro lado o campo $F$ pode escrever-se na forma

$$F(x,y,z) = rg(r)\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

pelo que, se $G(r)$ for uma primitiva de $rg(r)$ (i.e., $G'(r) = rg(r)$), temos

$$F = \nabla\ G(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

visto que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = G'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = rg(r)\frac{x}{r} = g(r)x,$$

e analogamente se tem $\dfrac{\partial G}{\partial y} = g(r)y$, $\dfrac{\partial G}{\partial z} = g(r)z$.

1. (b) Aplicando o resultado da alínea anterior tem-se

$$P\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r}$$

logo um potencial de $F$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ é

$$G(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Por conseguinte, sendo $S$ o segmento de recta unindo o ponto $(1,1,1)$ ao ponto $(2,-1,1)$, tem-se

$$\int_S F\cdot dg = G(2,-1,1) - G(1,1,1) = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Seja $P(x,y) = xy^2$ e $Q(x,y) = 2x^2y$. $P$ e $Q$ são campos de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^2$ e a elipse $C$ é uma curva simples fechada pelo que, designando por $R$ a região interior a $C$, temos (pelo teorema de Green)

$$\int_C xy^2\,dx + 2x^2y\,dy = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \int\int_R 2xy\,dx\,dy$$

recorrendo a uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{aligned} x &= 3\rho\cos\theta, \\ y &= 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad (\rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi) \end{aligned}$$

com jacobiano $J = 6\rho$, para calcular o integral duplo, temos,

$$\begin{aligned} \int_C xy^2\,dx + 2x^2y\,dy &= \int\int_R 2xy\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 72\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho\,d\theta \\ &= 72\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \\ &= 18\left[\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$