Análise Matemática III
2º semestre de 2002/2003

Exercício Teste 7 (a entregar na semana de 5/5/2003)

1. Considere a função definida por

$$f(x,y) = (x\ ,\ \cos(x+y))$$

   a) Determine os pontos em que f é localmente invertível.
   b) Decida se f é invertível no seu domínio.
   c) Sabendo que $f(0,\frac{\pi}{2}) = (0,0)$, determine a derivada de f^{-1} no ponto $(0,0)$.

2. Considere a seguinte equação

$$z + \operatorname{sen}(xy+z) = 0$$

   a) Mostre que a equação define z como função de x, y numa vizinhança do ponto $(0,1,0)$.
   b) Calcule as derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$$

Resolução:

1. a) Note-se que f é de classe C^1. Pelo teorema da função inversa, f é localmente invertível nos pontos em que a derivada de f é representada por uma matriz não singular. A derivada de f é dada por

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(x+y) \end{bmatrix}$$

Assim, f será localmente invertível nos pontos que verificarem a desigualdade

$$\det Df(x,y) = -\operatorname{sen}(x+y) \neq 0$$

ou seja, no conjunto dado por

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) :\ x+y = k\pi\}$$

No conjunto de pontos em que $\operatorname{sen}(x+y) = 0$, ou seja, no conjunto

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x+y = k\pi\}$$

o teorema da função inversa nada garante. Neste conjunto de pontos deveremos analisar directamente a função f quanto à sua injectividade.
Da igualdade $f(x,y) = f(u,v)$, obtemos,

$$u = x\ ;\ v = y + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$$

Assim, dois pontos terão a mesma imagem através de f se a diferença entre as respectivas ordenadas for $2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, para cada ponto existe uma vizinhança em que f é injectiva.

Note-se que esta análise é válida em $\mathbb{R}^2$ e, portanto, poderíamos não ter usado o teorema da função inversa para determinar a invertibilidade local de f.

b) Pela alínea anterior, dois pontos terão a mesma imagem através de f se a diferença entre as respectivas ordenadas for $2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto f não é globalmente invertível em $\mathbb{R}^2$.

c) Sendo $f(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 0)$, temos

$$Df^{-1}(0,0) = \left[Df(0, \frac{\pi}{2})\right]^{-1}$$

Portanto,

$$Df^{-1}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. a) Seja $F(x,y,z) = z + \operatorname{sen}(xy + z)$. Note-se que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $F(0,1,0) = 0$. Para além disso temos

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,0) = 2$$

Portanto, pelo teorema da função implícita existe uma vizinhança do ponto $(0,1,0)$ em que z se pode exprimir como função de x, y para os pontos em que $F(x,y,z) = 0$.

b) Fazendo $z = z(x,y)$ e derivando a equação $F(x,y,z(x,y)) = 0$ em ordem a x obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,0) + \frac{\partial F}{\partial z}(0,1,0)\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 0$$

e, portanto

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -\frac{1}{2}$$

Do mesmo modo, derivando a equação $F(x,y,z(x,y)) = 0$ em ordem a y obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0$$