Análise Matemática III
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2002/2003

Exercício Teste 8 (a entregar na semana de 12/5/2003)

Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z + 1)^2, \, 0 < z < 2\}$$

(a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(b) Encontre uma parametrização para M.

(c) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(0, 2, 1)$.

Resolução

(a) Consideremos a função $F : D \to \mathbb{R}^3$, com $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 9, \, 0 < z < 2\}$, definida por

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - (z + 1)^2.$$

Trata-se de uma função de classe C^1 tal que

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\},$$

ou seja, M é o conjunto de nível zero de F. A derivada

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2(z + 1) \end{bmatrix}$$

tem característica igual a um em todos os pontos de M. De facto, o ponto de coordenadas $(0, 0, -1)$ é o único em que isso não acontece, mas este ponto não pertence a M.

Portanto M é uma variedade de dimensão dois em $\mathbb{R}^3$.

(b) Em coordenadas cilíndricas a variedade M é dada pela equação $\rho^2 = (z + 1)^2$. Assim, consideremos a função $g : T \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = ((z + 1) \cos \theta, (z + 1) \operatorname{sen} \theta, z)$$

sendo

$$T = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi, \, 0 < z < 2\}.$$

Esta função é de classe C^1, injectiva e a respectiva derivada é dada pela matriz

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} -(z + 1) \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \\ (z + 1) \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que tem característica igual a dois, ou seja, as duas colunas são linearmente independentes.

Portanto g é uma parametrização para M.

(c) Dado que $g(\frac{\pi}{2},1)=(0,2,1)$, o espaço tangente a M no ponto $(0,2,1)$ é gerado pelas colunas da matriz

$$Dg(\frac{\pi}{2},1)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{aligned} T_{(0,2,1)}M &= \{\alpha(-2,0,0)+\beta(0,1,1) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\alpha,\beta,\beta) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e, portanto, é o plano dado pela equação

$$y=z.$$

O espaço normal a M no ponto $(0,2,1)$ é gerado pela linha da matriz

$$DF(0,2,1)=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\big(T_{(0,2,1)}M\big)^{\perp}=\{\lambda(0,4,-4) : \lambda\in\mathbb{R}\}$$

e, portanto, é a recta dada pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= -z \end{cases}$$