Análise Matemática III
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2002/2003

Exercício Teste 9 (a entregar na semana de 19/5/2003)

Recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange determine os pontos de maior e os de menor cota (coordenada z) na linha definida pela intersecção das superfícies dadas por $z = x^2 + 4y^2$ e por $x^2 + y^2 = 1$.

Resolução

Procuramos os pontos de máximo e os de mínimo da função $f(x, y, z) = z$ no conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + 4y^2\,,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Note-se que, sendo f uma função contínua e M, um conjunto compacto, a existência de um máximo e de um mínimo de f em M é garantida pelo teorema de Weierstrass.

Os pontos de máximo e de mínimo são pontos de estacionaridade da função

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = z + \lambda_1(x^2 + 4y^2 - z) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 1)$$

isto é, são soluções do sistema

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x = 0 \\ 8\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0 \\ 1 - \lambda_1 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - z = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)x = 0 \\ (4\lambda_1 + \lambda_2)y = 0 \\ \lambda_1 = 1 \\ z = x^2 + 4y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

donde se conclui que

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ z = 4 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ y = 0 \\ x = \pm 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Como $f(0, 1, 4) = f(0, -1, 4) = 4$ e $f(1, 0, 1) = f(-1, 0, 1) = 1$, os pontos $(0, 1, 4)$ e $(0, -1, 4)$ são os pontos de máximo de f e os pontos $(1, 0, 1)$ e $(-1, 0, 1)$ são os pontos de mínimo de f.