Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 2 (a entregar na aula prática da semana de 30/9/2002)

1) Mostre que o seguinte conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{z^2}{n},\ |z| < 1,\ n \in \mathbb{N}\}$$

tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

2) Seja $I \subset \mathbb{R}^3$ o intervalo $I =]0, 1[\times]0, 2[\times]0, 2[$ e seja $s : I \to \mathbb{R}$ a função em escada definida por

$$s(x, y, z) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1/2,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1 \\ 3 & 0 < x < 1/2,\ 0 < y < 1,\ 1 < z < 2 \\ 5 & 0 < x < 1/2,\ 1 < y < 2,\ 0 < z < 2 \\ 1/2 & 1/2 < x < 1,\ 0 < y < 2,\ 0 < z < 1 \\ \pi & 1/2 < x < 1,\ 0 < y < 2,\ 1 < z < 2 \end{cases}$$

a) Calcule $\int_I s$.

b) Se s tiver unidades de densidade de massa, por exemplo Kg/m^3, e se os comprimentos, i.e. x, y, z, estiverem expressos em m, em que unidades vem dado este integral ?

Resolução

1. Observe-se que $S = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ onde

$$S_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{z^2}{n},\ |z| < 1\}.$$

Como a união numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula, para provar que S tem medida nula, basta mostrar que cada S_n tem medida nula. Para isso note-se que cada S_n é uma superfície cónica, que se pode obter como a união dos gráficos em $\mathbb{R}^3$ de duas funções contínuas definidas em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^2$. De facto, para $0 \leq z < 1$ temos

$$z = \sqrt{n(x^2 + y^2)} = f_1(x, y)$$

com $x^2 + y^2 < 1/n$. Para $-1 < z < 0$ temos

$$z = -\sqrt{n(x^2 + y^2)} = f_2(x, y)$$

com $x^2+y^2 < 1/n$. Assim cada S_n é a união dos gráficos das funções contínuas f_1 e f_2 definidas no conjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{n}\right\}.$$

Portanto S tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

2.a) Considere-se a partição do intervalo $I =]0,1[\times]0,2[\times]0,2[$ dada por $\{I_j : j = 1,2,3,4,5\}$ em que

$$\begin{aligned} I_1 &=]0,1/2[\times]0,1[\times]0,1[\\ I_2 &=]0,1/2[\times]0,1[\times]1,2[\\ I_3 &=]0,1/2[\times]1,2[\times]0,2[\\ I_4 &=]1/2,1[\times]0,2[\times]0,1[\\ I_5 &=]1/2,1[\times]0,2[\times]1,2[\end{aligned}$$

Considere-se também o conjunto de valores $\{s_j : j = 1,2,3,4,5\}$ dados por

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \\ s_2 &= 3 \\ s_3 &= 5 \\ s_4 &= 1/2 \\ s_5 &= \pi \end{aligned}$$

Assim temos $s(x,y,z) = s_j$ para $(x,y,z) \in I_j$ logo o integral é dado por

$$\int_I s = \sum_{j=1}^{5} s_j \; vol(I_j) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 + \pi \times 1 = 8 + \pi$$

2.b) Se x, y, z estão em m então $vol(I_j)$ vem em m^3 e se s_j está em Kg/m^3 então o integral $\int_I s$ vem dado em Kg.