# Análise Matemática III
# 2º semestre de 2002/2003

**Exercício Teste 2** (a entregar na semana de 17/3/2003)

1. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \ z \leq x^2 + y^2, \ z \geq 0\}$$

usando integrais iterados da forma

(a) $\int \left( \int \left( \int \, dx \right) \, dy \right) \, dz$;
(b) $\int \left( \int \left( \int \, dy \right) \, dz \right) \, dx$.

2. Esboce a região de integração e exprima pela ordem de integração $\int_{\cdots}^{\cdots} \int_{\cdots}^{\cdots} \int_{\cdots}^{\cdots} \, dx \, dy \, dz$ o integral

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-y} \left( \int_0^{2(x+y)} dz \right) dx \right) dy.$$

## Resolução:

1. O sólido $S$ é um sólido de revolução que tem simetria cilíndrica em torno do eixo $0z$. Assim para ter uma ideia do seu aspecto podemos fazer $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e considerar a região plana definida por

$$R = \{(r,z) \in \mathbb{R}^2 : r^2 + z^2 \leq 2; z \leq r^2; z \geq 0\}$$

A intersecção da circunferência $r^2 + z^2 = 2$ e a parábola $z = r^2$ é no ponto $z = 1$, $r = 1$, logo a região plana $R$ que se obtém no plano $r0z$ é a que se representa na figura 1.

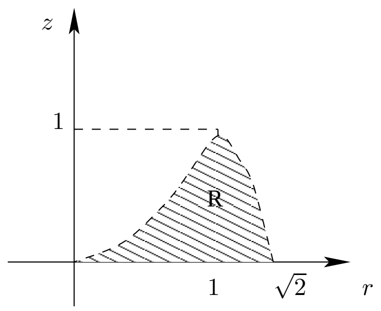


Figure 1: O conjunto $S$ obtém-se rodando a região plana $R$ em torno do eixo $Oz$

O sólido de revolução é então a região compreendida entre o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ com $z \geq 0$ como se pode ver na figura 2.

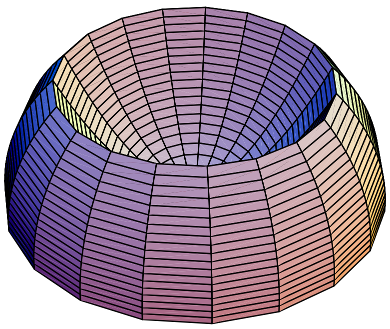

Figure 2: O conjunto $S$

(a) Fixamos $0 \leq z \leq 1$, ou seja, fazemos cortes por planos perpendiculares ao eixo $0z$. As figuras que obtemos são coroas circulares dadas por

$$\sqrt{z} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2-z^2}$$

e representadas na figura 3.

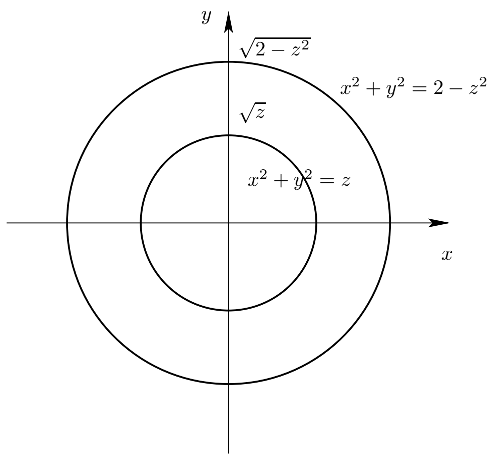


Figure 3: Cortes em $S$ perpendiculares a $0z$

O volume de $S$ é 4 vezes o volume do sólido restrito ao 1º octante, portanto o volume de $S$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} vol\,(S) &= \int_S 1 \\ &= 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_{\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{2-z^2-y^2}} dx\,dy\,dz \;+\; 4\int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2-z^2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2-y^2}} dx\,dy\,dz \end{aligned}$$

(b) Neste caso devemos fixar $x$ entre $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$, ou seja, fazer cortes com planos perpendiculares ao eixo $0x$. No entanto, temos 2 tipos de cortes, pois se $-1 < x < 1$ o plano intersecta o parabolóide e a esfera, mas se $-\sqrt{2} < x < 1$ ou $1 < x < \sqrt{2}$ o plano intersecta apenas a esfera. Assim para $-1 < x < 1$ o corte é definido por

$$\begin{cases} 0 < z < x^2; & -\sqrt{2 - z^2 - x^2} < y < \sqrt{2 - z^2 - x^2} \\ x^2 < z < 1; & -\sqrt{2 - z^2 - x^2} < y < -\sqrt{z - x^2} \text{ ou } \sqrt{z - x^2} < y < \sqrt{2 - z^2 - x^2} \end{cases}$$

como se representa na figura 4.

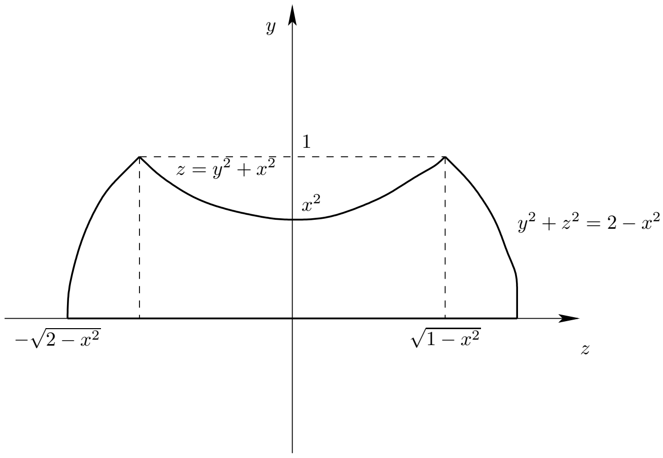


Figure 4: Cortes em $S$ perpendiculares a $0x$ com $-1 < x < 1$

Para $1 < |x| < \sqrt{2}$ os cortes que obtemos são semi-círculos de raio $\sqrt{2 - x^2}$ como se representa na figura 5.

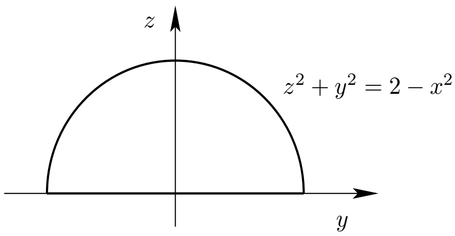


Figure 5: Cortes em $S$ perpendiculares a $0x$ com $1 < |x| < \sqrt{2}$

Podemos então escrever o volume de $S$ usando um integral iterado com a ordem pedida

$$\begin{aligned} vol\,(S) &= \int_S 1 \\ &= \int_{-1}^{1} \int_0^{x^2} \int_{-\sqrt{2-z^2-x^2}}^{\sqrt{2-z^2-x^2}} dy\, dz\, dx + 2 \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{2-z^2-x^2}} dy\, dz\, dx \, + \\ &\quad + 2 \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{-\sqrt{2-z^2-x^2}}^{\sqrt{2-z^2-x^2}} dy\, dz\, dx \end{aligned}$$

2. Os limites de integração permitem-nos concluir que a região de integração $W$ é descrita por

$$\begin{cases} 0 < y < 1 \\ 0 < x < 1 - y \\ 0 < z < 2(x + y) \end{cases}$$

Assim vemos que a região está limitada por planos e um esboço da região é representado na figura 6.

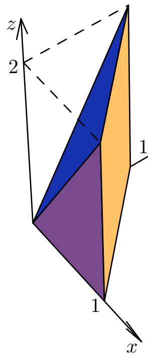


Figure 6: O conjunto $W$

Para escrevermos uma expressão que nos dá o volume desta região $W$, usando um integral iterado da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots}\ dx\ dy\ dz$, precisamos de fazer cortes com planos perpendiculares ao eixo $0z$.

Para $0 < z < 2$ o corte é definido por

$$\begin{cases} 0 < y < \frac{z}{2}; & \frac{z}{2} - y < x < 1 - y \\ \frac{z}{2} < y < 1; & 0 < x < 1 - y \end{cases}$$

e encontra-se representado na figura 7.

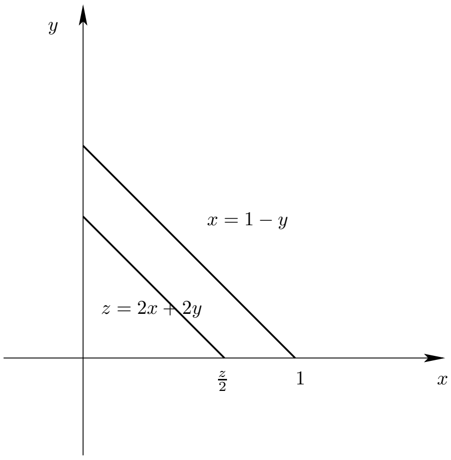


Figure 7: Cortes em $W$ perpendiculares a $0z$

Finalmente podemos escrever o integral iterado na região $W$ pela ordem de integração pretendida

$$\begin{aligned} vol\,(W) &= \int_W 1 \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}-y}^{1-y} dx\,dy\,dz + \int_0^2 \int_{\frac{z}{2}}^{1} \int_0^{1-y} dx\,dy\,dz \end{aligned}$$