Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Homotopia e teorema de Green

Exercício 1

Considere o campo vetorial $F(x,y) = (-y + e^{x+y}, x + y + e^{x+y})$.

a) Determine se F *é um gradiente no seu domínio.*

b) Calcule o trabalho de F *ao longo da curva* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *orientada no sentido anti-horário.*

Resolução:

a) Temos que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 \neq 0,$$

pelo que F não é fechado, e portanto não é gradiente no seu domínio.

b) Pelo teorema de Green, sendo F de classe C^1 no disco D limitado por C,

$$\oint_C F \cdot dg = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 2dxdy = 2\pi.$$

Exercício 2 *Considere o campo vetorial* $G(x,y) = (-y + x^3, x + y^5) + \nabla\psi(x,y)$, *onde* $\psi(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)$. *Calcule o trabalho de* G *ao longo da fronteira do quadrado*

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$$

percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Resolução: Pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, o trabalho do termo $\nabla\psi(x,y)$ é nulo, porque a fronteira C do quadrado é uma linha fechada. Para calcular o trabalho do campo $(-y+x^3, x+y^5)$, aplicamos o teorema de Green ao quadrado Q. Assim o trabalho de G ao longo de C é dado por:

$$\begin{aligned}
\oint_C G \cdot dg &= \oint_C (-y + x^3, x + y^5) \cdot dg \\
&= \iint_Q \left(\frac{\partial(x + y^5)}{\partial x} - \frac{\partial(-y + x^3)}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \iint_Q 2dxdy = 2\mathrm{vol}_2(Q) = 8.
\end{aligned}$$

Exercício 3

Calcule

$$\oint_Q \left(-\frac{y}{x^2+y^2}+e^{x^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\operatorname{sen} y^2\right)dy,$$

onde Q *é o quadrado com vértices* $(2,0),(0,2),(-2,0),(0,-2)$ *percorrido uma vez no sentido direto.*

Resolução: Claramente o campo $F(x,y)=(e^{x^2},\operatorname{sen} y^2)$ é fechado, e portanto gradiente (uma vez que está definido em $\mathbb{R}^2$, que é um conjunto simplesmente conexo). Portanto o seu integral ao longo de Q será nulo. É fácil ver que o campo

$$G(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

é também fechado:

$$\frac{\partial G_1}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial G_2}{\partial x}.$$

No entanto, uma vez que o domínio de G ($\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$) não é simplesmente conexo, não podemos concluir que G é um gradiente. De facto, não é: se C representa a circunferência de raio 1 em torno da origem percorrida uma vez no sentido direto, parametrizada por exemplo por $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$g(\theta)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta),$$

tem-se

$$\begin{aligned}\oint_C G\cdot dg&=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}\frac{d(\operatorname{sen}\theta)}{d\theta}\right)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\neq 0.\end{aligned}$$

(G é o conhecido vórtice, por vezes também chamado o “campo do ralo da banheira”). Se A é a região do plano compreendida entre C e Q, tem-se $\partial A=C\cup Q$. A orientação usual de ∂A corresponde a percorrer Q no sentido direto e C no sentido inverso; portanto pelo Teorema de Green

$$\oint_Q G\cdot dg=\iint_A\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)dxdy+\oint_C G\cdot dg=\iint_A 0dxdy+2\pi=2\pi.$$

Alternativamente, uma vez que as curvas Q e C são homotópicas no domínio de G, temos

$$\oint_Q G \cdot dg = \oint_C G \cdot dg = 2\pi.$$

O integral pedido é portanto.

$$\oint_Q G \cdot dg + \oint_Q F \cdot dg = 2\pi + 0 = 2\pi.$$

Exercício 4 *Considere o campo vetorial definido em* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *por*

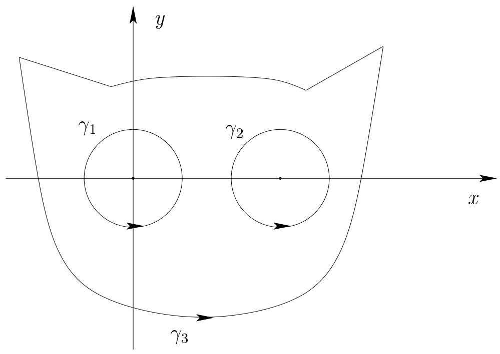
$$F(x,y) = \left(-\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

Sejam γ_1 *e* γ_2 *as circunferências de raio 1 centradas em* $(0,0)$ *e* $(3,0)$*, e* γ_3 *a curva simples fechada representada na figura. Com as orientações indicadas na figura, calcule*

(a) $\oint_{\gamma_1} F \cdot dg$;

(b) $\oint_{\gamma_2} F \cdot dg$;

(c) $\oint_{\gamma_3} F \cdot dg$.



Resolução:

(a) A parametrização $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ para γ_1 dada por

$$g(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

é compatível com a orientação indicada na figura. Como

$$F(g(\theta)) = \left(-\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta, \cos^3\theta\right),$$

temos

$$\oint_{\gamma_1} F \cdot dg = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi.$$

(b) É fácil ver que F é um campo fechado. O conjunto aberto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ é um conjunto simplesmente conexo contido no domínio de F; logo, F é gradiente neste conjunto. Uma vez que $\gamma_2 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, concluímos que

$$\oint_{\gamma_2} F \cdot dg = 0.$$

Alternativamente, poderíamos ter observado que γ_2 é homotópica a um ponto no domínio de F, ou ainda ter aplicado o Teorema de Green ao círculo cuja fronteira é γ_2.

(c) Uma vez que γ_3 é homotópica a γ_1 no domínio de F, ou seja, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, concluímos que

$$\oint_{\gamma_3} F \cdot dg = \oint_{\gamma_1} F \cdot dg = \pi.$$