Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Recuperação do 1º Teste – 4 de Janeiro de 2005

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Considere os seguintes campos vectoriais em $\mathbb{R}^2$:

$$X = 2y\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = \mathrm{e}^x\,\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} y\frac{\partial}{\partial y}.$$

(2 val.) (a) Calcule $[X, Y]$.

(3 val.) (b) Determine o fluxo do campo X.

(1 val.) (c) Os fluxos dos campos X e Y comutam ?

(2) Considere o conjunto das *matrizes simplécticas*

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \mid A^t J A = J\right\},$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

e I é a matriz identidade $n \times n$.

(4 val.) (a) Mostre que $Sp(2n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão $n(2n + 1)$.

(3 val.) (b) Determine a sua álgebra de Lie, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$.

(3 val.) (3) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Mostre que se $\omega \in \Omega^1(M)$ e $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ então

$$d\omega(X, Y) = X \cdot (\omega(Y)) - Y \cdot (\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

(4 val.) (4) Seja M uma variedade com bordo de dimensão 2, compacta, conexa e orientável, com ∂M difeomorfo a S^1. Seja $\omega \in \Omega^1(M)$ uma forma-1 cuja restrição a ∂M é a forma-1 $\sigma = \cos\theta d\theta$, onde θ é a habitual coordenada angular em S^1. Mostre que $d\omega$ tem pelo menos um zero em $M \setminus \partial M$.