Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Recuperação do 2º Teste – 4 de Janeiro de 2005

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Seja (M,g) uma variedade Riemanniana definida por $M=\mathbb{R}^2$ e

$$g=\frac{1}{h^2(x,y)}(dx\otimes dx+dy\otimes dy)$$

onde $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é uma função positiva.

(3 val.) (a) Mostre que a forma de conexão ω_1^2 associada ao referencial ortonormado $E_1=h\frac{\partial}{\partial x}$, $E_2=h\frac{\partial}{\partial y}$ é dada por

$$\omega_1^2=\frac{h_y}{h}dx-\frac{h_x}{h}dy,$$

onde $h_x=\frac{\partial h}{\partial x}$ e $h_y=\frac{\partial h}{\partial y}$.

(3 val.) (b) Mostre que (M,g) possui curvatura de Gauss

$$K=h(h_{xx}+h_{yy})-(h_x^2+h_y^2).$$

(c) Considere $h(x,y)=\cosh(x)$.

(3 val.) (i) Justifique que neste caso (M,g) não é geodesicamente completa.

(3 val.) (ii) Mostre que as equações locais de uma geodésica são:

$$\ddot{x}-\tanh(x)\ (\dot{x}^2-\dot{y}^2)=0;$$
$$\ddot{y}-2\tanh(x)\ \dot{x}\,\dot{y}=0.$$

(2 val.) (iii) Prove que o eixo dos yy é a (imagem) de uma geodésica.

(2 val.) (iv) Mostre que a distância da origem ao ponto $(0,1)$ é menor ou igual que 1.

(4 val.) (2) (*Teorema de Shur*) Mostre que se M é uma variedade Riemanniana de dimensão $n\geq 3$, conexa e isotrópica (i.e. isotrópica em todos os seus pontos) então M tem curvatura constante.

Sugestão: Utilize as equações de estrutura para mostrar que $dK=0$.