Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Teste 1 – 26 de Outubro de 2004

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Seja $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x^2-y^2, xy).$$

A função F satisfaz $F(p) = F(\lambda p)$ para todo o $\lambda \neq 0$ e $p \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, logo podemos considerar a função $\widetilde{F} : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\widetilde{F}([p]) = F(p)$ onde $[p]$ é a classe de equivalência de p.

Mostre que:

(3 val.) (a) $\widetilde{F}$ é uma imersão.

(3 val.) (b) $\widetilde{F}$ é injectiva. Justifique que $\widetilde{F}$ é um mergulho de $\mathbb{R}P^1$ em $\mathbb{R}^2$.

(4 val.) (2) (a) Mostre que as matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ do grupo especial linear real $SL(2,\mathbb{R})$.

(3 val.) (b) Escreva uma fórmula explícita para a curva $\gamma : \mathbb{R} \to SL(2,\mathbb{R})$ dada por

$$\gamma : s \mapsto \exp(sA_1).$$

Use o resultado para escrever uma expressão para o fluxo $\psi_s(B)$ do campo invariante à esquerda X^{A_1}, calculado no ponto

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}).$$

(3 val.) (3) Se $\psi_t : S^2 \to S^2$ é uma rotação da esfera S^2 (centrada na origem), por um ângulo t, em torno do eixo $0z$, mostre que ψ_t é o fluxo de um campo vectorial definido em S^2.

(4 val.) (4) Seja M uma variedade de dimensão n e seja $\omega \in \Omega^n(M)$ uma forma diferencial que satisfaz $\omega_p \neq 0\ \forall p \in M$ (ω diz-se uma **forma volume**). Dado um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ chama-se **produto interior** de ω por X à forma $i_X\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ definida por

$$(i_X\omega)_p(v_2,\dots,v_n) = \omega_p(X_p, v_2, \dots, v_n)$$

onde $v_i \in T_pM$ com $i = 2,\dots,n$.

Mostre que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \Omega^{n-1}(M) \\ X &\longmapsto i_X\omega \end{aligned}$$

é um isomorfismo vectorial.