Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana
Teste 2 – 14 de Dezembro de 2004

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 1 hora e 30 minutos.

(1) Considere a aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ onde

$$U = \{(s, \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < s < \infty, 0 < \theta < 2\pi\}$$

e f é dada por

$$f(s, \theta) = (h(s) \sin\theta, h(s) \cos\theta, g(s))$$

com $h(s) > 0$ e $g(s)$ funções diferenciáveis tais que

$$(h'(s))^2 + (g'(s))^2 = 1.$$

A função f parametriza a superfície de revolução S com eixo $0z$, obtida por rotação da curva $\alpha(s) = (h(s), g(s))$ (parametrizada pelo comprimento de arco s) em torno desse eixo. As imagens das curvas $s = cte$ e $\theta = cte$ são designadas por *paralelos* e *meridianos* de S respectivamente.

(3 val.) (a) Mostre que nas coordenadas (s, θ) a métrica em S induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$g = ds \otimes ds + h^2(s) d\theta \otimes d\theta.$$

(3 val.) (b) Calcule as formas da conexão associadas ao referencial ortonormado

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad E_2 = \frac{1}{h(s)} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

(3 val.) (c) Mostre que a curvatura de Gauss de S é

$$K = -\frac{h''(s)}{h(s)}.$$

(3 val.) (d) Mostre que as equações locais de uma geodésica são:

$$\ddot{s} - h(s)\, h'(s)\, \dot{\theta}^2 = 0;$$

$$\ddot{\theta} + 2\, \frac{h'(s)}{h(s)}\, \dot{s}\, \dot{\theta} = 0.$$

(2 val.) (e) Mostre que:

(i) qualquer meridiano pode ser parametrizado de forma a ser uma geodésica;

(ii) um paralelo $s = s_0$ pode ser parametrizado de forma a ser uma geodésica sse $h'(s_0) = 0$.

(3 val.) (f) Obtenha o seguinte significado geométrico da 2ª equação local das geodésicas:

- Se $\beta(t)$ é o ângulo orientado ($\beta(t) < \pi$) de uma geodésica γ com um paralelo P que intersecta γ em $\gamma(t)$ então

$$r \cos \beta = cte,$$

onde $r(t) = h(s(t))$ é o raio do paralelo P (esta equação é designada *relação de Clairaut*).

(3 val.) (2) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2 com curvatura de Gauss K positiva em todos os pontos e onde M é difeomorfa à esfera S^2. Prove que quaisquer duas geodésicas que sejam curvas fechadas e simples em M têm de se intersectar.
(Assuma que se M e M' são homeomorfas então $\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M')$ onde $\mathcal{X}(M)$ é a característica de Euler de M.)