Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exame de Métodos Numéricos - 1/07/2005

Cursos de Engenharia Electrotécnica, Civil, Naval, Geológica e Mineira e de Materiais

Apresente todos os cálculos que efectuar

I

1. Seja $f(x) = \ln(1+2x) - e^{-x}$. Sabe–se que existe um só número real z, localizado no intervalo $(0.4, 0.6)$, tal que $f(z) = 0$. Pretende-se aproximar z por um método iterativo da forma $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, ...$

   (a) No caso do método de Newton, qual a função iteradora g ? Indique um valor inicial x_0 de modo a que o método convirja para z (prove a convergência). **[1.7]**

   (b) Com o valor x_0 escolhido, obtenha as 2 primeiras iteradas x_1, x_2 do método de Newton e determine um majorante para o erro de x_2. **[2.3]**

   (c) No caso de $g(x) = x + f(x)$, obtiveram-se os seguintes resultados para o processo iterativo $x_0 = 0.7$, $x_{n+1} = g(x_n)$, com $n = 0, 1, 2, ..., 7$:

   1.45777, 3.72216, 7.94078, 13.5925, 20.2701, 27.7234, 35.79, 44.3594. Diga o que esses resultados indicam no que respeita à convergência do método e dê uma justificação teórica. **[1.0]**

2. Seja $g : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Mostre que g tem pelo menos um ponto fixo em $[a, b]$. Indique uma condição suficiente para esse ponto fixo ser único (demonstrando). **[1.5]**

II

1. Sendo $A_{3\times3}$ uma matriz quadrada de ordem 3 com diagonal estritamente dominante por linhas, mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b}$ é um vector de $\mathbf{R^3}$, qualquer que seja a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ de $\mathbf{x}$. **[1.5]**

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

   onde α é um número real.

   (a) Indique uma condição sobre α suficiente para que seja possível aplicar o método de Jacobi ao sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. **[1.0]**

   (b) Faça $\alpha = 3$ e $\mathbf{b} = [1\ \ 1\ \ 1]^T$. Começando com $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ \ 2\ \ 1]^T$, obtenha a iterada $\mathbf{x}^{(1)}$. Calcule o valor $W(n)$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}\|_\infty \leq W(n)\, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty$$

   [2.0]

III

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $y(x)$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$y(x)$	21	17.5	15	13.125	11.667

   (a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine $p_2(0.1)$, onde p_2 é o polinómio interpolador de $y(x)$ nos 3 primeiros pontos tabelados. **[1.5]**

   (b) Sabe-se que é válida a igualdade:

$$y'(x) = \frac{-1}{21}(y(x))^2 \qquad (1)$$

   Escreva a fórmula que lhe dá o erro de interpolação $y(0.1) - p_2(0.1)$, onde p_2 é o polinómio obtido em a). Usando a relação (1), obtenha um majorante para esse erro, sem recorrer à solução exacta da equação diferencial. **[2.0]**

   (c) Considere a equação diferencial da alínea anterior, com a condição inicial $y(0) = 21$. Determine uma aproximação para a sua solução $y(x)$ no ponto $x = 0.1$, utilizando o método de Heun. **[1.5]**

   (d) Utilize a regra de Simpson para aproximar o seguinte integral

$$I = \int_0^{0.8} ln(x+1)\, y(x) dx,$$

   onde $y(x)$ é a função tabelada acima,
   i) com 2 subintervalos **[0.7]** ii) com 4 subintervalos. **[1.3]**

2. Considere a tabela de valores

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
F_i	1.00	1.57	2.00	4.30	7.00

   de uma função F,

   (a) Diga em que consiste, usando a definição, a melhor aproximação de F, no sentido dos mínimos quadrados, por uma função do tipo $h(x) = a\,x + b\,cos\,(\pi x)$, com a, b constantes reais. **[0.5]**

   (b) Determine os valores de a e b dessa melhor aproximação. **[1.5]**