Instituto Superior Técnico

Departamento de Matemática

**Exame de Análise Numérica/Métodos Numéricos - 30/06/2004**

Cursos de Engenharia Civil, Electrotécnica e Naval

**Apresente todos os cálculos que efectuar**

**I**

1. Considere a função
$$f(x) = 1 - x^2 - 0.5\ e^{-x}, \tag{1}$$
que tem um único zero $z \in [0,1]$. Com o fim de aproximar $z$, considere a sucessão
$$x_{m+1} = x_m + A\ f(x_m), \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$
sendo $A$ um parâmetro real diferente de zero.

   (a) Mostre que, se $A = 1$, a sucessão converge para $z$, qualquer que seja $x_0$ escolhido no intervalo $I = [0.7, 1]$. **[2.0]**

   (b) No caso de $A = 2$, calcularam-se alguns elementos da sucessão: $0.5$, $1.39347$, $-0.738257$, $-1.92059$, $-14.12289$, $-1.36027 \times 10^6$, $-1.79602 \times 10^{590756}$... Diga o que esses valores sugerem quanto à convergência da sucessão para $z$ e dê uma justificação teórica. **[1.5]**

   (c) Mostre que o método de Newton aplicado à equação $f(x) = 0$ converge para $z$, se a iterada inicial for $x_0 = 1$. **[1.5]**

2. Considere um método do ponto fixo $y_{m+1} = g(y_m), m = 0, 1, 2...$ com função iteradora $g$ contínua. Considere um valor inicial $y_0$. Mostre que, se
$$y_1 > max\{y_0, y_2\} \ \text{ ou } \ y_1 < min\{y_0, y_2\},$$
então $g$ tem pelo menos um ponto fixo entre $y_0$ e $y_1$. **[1.5]**

**II**

1. Considere o sistema de equações lineares
$$\begin{aligned} &10x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ &-2x_1 + 10x_2 - 8x_3 = 20 \\ &7x_1 + x_2 + 10x_3 = 20 \end{aligned}$$

   (a) Mostre que está garantida a convergência do método iterativo de Jacobi aplicado ao sistema. **[1.0]**

   (b) Sendo $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 2\ 0)^T$, obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$. **[1.5]**

   (c) Determine o número $k$ de modo que $\sum_{i=1}^{3} |x_i - x_i^{(k+1)}| < 10^{-3}$, onde $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ é a solução exacta do sistema. **[2.0]**

## III

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f$ polinomial de grau $\leq 3$, em que $c$ é um real

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $c$ | 3 | 0 | 2 | 0 |

   (a) Calcule $I = \int_0^4 f(x)dx$ (em função de $c$) de duas maneiras: utilizando a regra de Simpson (simples); utilizando também a regra de Simpson composta. **[2.0]**

   (b) A partir dos valores obtidos em a), calcule $c$, justificando. **[0.5]**

   (c) Determine uma expressão para o polinómio $p_2(x)$ de grau $\leq 2$ que interpola $f$ nos pontos $1,\ 2,\ 4$ da tabela. **[1.5]**

   (d) Pretende-se aproximar a função $f(x)$ por uma função do tipo

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1\ x + \alpha_2\ e^x$$

   que satisfaça as condições: $g$ deve interpolar $f$ em $x = 1$ e, em relação aos pontos $2,\ 3,\ 4$, os desvios (ou erros) são minimizados segundo o critério dos mínimos quadrados. Escreva as equações que permitem obter as constantes $\alpha_0, \alpha_1$ e $\alpha_2$ (não precisa de resolver o sistema). **[2.0]**

2. Para aproximar integrais do tipo

$$\int_0^{\pi} F(x)dx$$

   determine uma fórmula de quadratura que utilize os valores de $F$ nos pontos $0,\ \pi/2,\ \pi$ e que seja exacta para funções da forma

$$F(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

   com $c_0, c_1, c_2$ constantes reais. **[1.5]**

3. Considere a equação diferencial

$$y'(x) = y(x)(1 + e^x),$$

   com a condição inicial

$$y(0) = 1.$$

   Usando o método de Runge Kutta de Heun com passo $h = 0.1$, obtenha um valor aproximado da solução $y(x)$ em $x = 0.1$. **[1.5]**