

Método de Newton para Sistemas Não-Lineares

Um sistema de n -equações não-lineares a n -incógnitas tem a forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

onde $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n$. Definindo $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ e $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T$, podemos escrever o sistema na forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \\ \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemplo: O sistema não-linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -6 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tem como solução} \\ \mathbf{x} = [-1 \ 2 \ 3]^T \end{array} \right.$$

pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{onde} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 - 4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 1 \\ x_1x_2x_3 + 6 \end{bmatrix}$$

Para funções $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, o método de Newton é dado por:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n)$$

No caso de funções vectoriais, $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, a generalização do método de Newton é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n+1)} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(n)}) \\ \text{onde } \mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - [J(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

e

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

é a matriz Jacobiana de \mathbf{F} , isto é, $J(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n$.

Logo, dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, as iteradas $\mathbf{x}^{(n+1)}, n = 0, 1, 2, \dots$ são calculadas por:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - [J(\mathbf{x}^{(n)})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}), \quad (1)$$

O método (1) é conhecido como “Método de Newton” para sistemas não-lineares.

Cálculo de $\mathbf{x}^{(n+1)}$

De (1) temos:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)} = - [J(\mathbf{x}^{(n)})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

Fazendo $\mathbf{d} = \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}$, vem:

$$\mathbf{d} = - [J(\mathbf{x}^{(n)})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

e, multiplicando ambos os lados por $J(\mathbf{x}^{(n)})$, obtemos:

$$J(\mathbf{x}^{(n)})\mathbf{d} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \quad (2)$$

A equação (2) é um sistema linear que pode ser resolvido para obter o vector \mathbf{d} , através das técnicas usuais: Método Eliminação de Gauss, LU , Jacobi, Gauss-Seidel, etc.

Uma vez calculado \mathbf{d} , $\mathbf{x}^{(n+1)}$ é dado por:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{d} \quad (3)$$

Observação: Se $J(\mathbf{x}^{(n)})$ for não-singular $\forall n$ e se $\mathbf{x}^{(0)}$ estiver suficientemente perto de \mathbf{x} , pode-se provar que $\mathbf{x}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}$ e a convergência é quadrática.

Exemplo: Calculemos 2 iteradas do método de Newton para o sistema não-linear abaixo.

$$\left. \begin{array}{l} x_2 - x_1^2 + 2x_1 = 0.5 \\ x_1^2 + 4x_2^2 = 4 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 + 2x_1 - 0.5 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0 \end{array} \right.$$

Solução

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1^2 + 2x_1 - 0.5 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{bmatrix}$$

Pelo método de Newton temos:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - [J(\mathbf{x}^{(n)})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} J(\mathbf{x}^{(n)})\mathbf{d} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \\ \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{d} \end{cases}$$

Cálculo de $J(\mathbf{x}^{(n)})$

$$J(\mathbf{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1^{(n)} + 2 & 1 \\ 2x_1^{(n)} & 8x_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{x}^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} -2x_1^{(0)} + 2 & 1 \\ 2x_1^{(0)} & 8x_2^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (0 \ 1.0)^T$. Então,

$$\begin{aligned} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= x_2^{(0)} - (x_1^{(0)})^2 + 2x_1^{(0)} - 0.5 = 1 - 0.5 = 0.5 \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= (x_1^{(0)})^2 + 4(x_2^{(0)})^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Logo, temos o seguinte sistema linear para o cálculo de \mathbf{d} :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{que tem como solução:} \\ d_2 = 0 \text{ e } d_1 = -0.25 \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} + d_1 = 0.0 - 0.25 = -0.25 \\ x_2^{(0)} + d_2 = 1.0 + 0.0 = 1.0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{x}^{(2)}$:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}$$

onde \mathbf{d} é solução do sistema linear

$$J(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -2x_1^{(1)} + 2 & 1 \\ 2x_1^{(1)} & 8x_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_2^{(1)} - (x_1^{(1)})^2 + 2x_1^{(1)} - 0.5 \\ (x_1^{(1)})^2 + 4(x_2^{(1)})^2 - 4 \end{bmatrix}$$

donde obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ -0.5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ -0.0625 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método eliminação Gauss a este sistema vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-0.5}{2.5} = -0.2 \\ E_2 - m_{21}E_1 \longrightarrow E_2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} 2.5d_1 + d_2 = 0.0625 \\ 8.2d_2 = -0.050 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} d_2 = -0.0061 \\ d_1 = 0.02744 \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= -0.25 + 0.02744 = -0.22256 \\ x_2^{(2)} &= 1.0 - 0.00610 = 0.99390 \end{aligned}$$