

## Trabalho de Métodos Numéricos

Lic. Eng. Electrotécnica, Civil, Naval, Minas e Materiais

Prazo de Entrega: 9 de Maio 2005

Limite de páginas para o relatório = 10.

VERSÃO 1/2005

### A: Secção Teórica

Considere a equação  $f(x) = 0$ , com

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x - 2.1 = 0 \quad (1)$$

- a) Mostre que essa equação tem uma única raiz  $z$  no intervalo  $[-3, -2.3]$
- b) Considere a família de métodos iterativos (do ponto fixo) com funções iteradoras

$$g_\lambda(x) = x + \lambda f(x) \quad (2)$$

onde  $\lambda \neq 0$  é uma constante real dada.

i) Mostre que, se  $\lambda \in [-0.3, 0]$ , o método do ponto fixo com função iteradora  $g_\lambda$  converge para  $z$ , se a iterada inicial  $x_0$  for escolhida suficientemente próxima de  $z$ .

ii) No caso em que  $\lambda = 0.1$ , o que pode dizer quanto à convergência do método ?

c) No caso em que o método gerado por  $g_\lambda$  converge linearmente ou não converge, é possível definir uma outra função iteradora de modo a ter-se um método com convergência mais rápida. Com efeito, seja

$$G_\lambda(x) = x - \frac{(g_\lambda(x) - x)^2}{g_\lambda(g_\lambda(x)) - 2g_\lambda(x) + x} \quad (3)$$

onde  $g_\lambda(x)$  é a função (2) acima. De acordo com a teoria (para mais detalhes, ver Sebenta do Prof. M.Carpentier, pg. 57), se  $g'_\lambda(z) \neq 0$  então  $G'_\lambda(z) = 0$ . Nesta alínea é-lhe pedido apenas para verificar que  $\lim_{x \rightarrow z} G_\lambda(x) = z$ .

### B: Secção Computacional

d) Relativamente a **b-i)**, calcule aproximações para  $z$  até que seja satisfeito o seguinte critério de paragem:  $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$ , considerando  $x_0 = -2.3$  e fazendo  $\lambda_k = -0.05 k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ . Verifique, para cada  $\lambda_k$ , o número de iterações necessárias para que o critério de paragem seja

satisfeito. Com base nesses valores, determine o valor de  $\lambda_k = \Lambda$  que proporciona a convergência mais rápida. Justifique ainda o critério usado.

**e)** Explique o resultado da alínea anterior com base no estudo da função iteradora.

**f)** O que acontece se aplicar o método da família (2) com  $\lambda = 0.1$  e o mesmo valor de  $x_0$ ? Justifique os resultados com base na teoria do método do ponto fixo.

**g)-i)** Usando o método  $x_{m+1} = G_\lambda(x_m)$  introduzido em **c)**, com os valores  $\lambda = -0.05$  e  $\lambda = 0.1$ , calcule uma aproximação de  $z$  com  $x_0 = -2.3$  e utilizando o critério de paragem usado acima.

**g)-ii)** Utilizando os dados fornecidos pelo programa, calcule os quocientes  $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  com vários valores de  $p : 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$ . Diga o que esses valores indicam no que respeita à ordem de convergência. (Tome  $z$  como sendo a aproximação final  $x_{N+1}$ ).