1. Pretende-se aplicar o método numérico

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0, \quad x_4^{(0)} = 0, \\ x_1^{(n+1)} = 1 + 0.25\left(x_2^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_2^{(n+1)} = 0.5 + 0.25\left(x_1^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_3^{(n+1)} = 0.25 + 0.25\left(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_4^{(n+1)} = 0.25\left(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_3^{(n)}\right), \quad n = 0, 1, ... \end{cases} \tag{1}$$

ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Justifique a convergência do método (1).

(b) Efectue duas iterações do método (1) e indique um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_1$.

(c) Mostre que $\max_{1\leq i\leq 4} |x_i - x_i^{(n)}| \leq 4 \times 0.75^n$, $n = 1, 2, ...$

2. Considere a resolução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ vectores de R^3 e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 13 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in R.$$

(a) Mostre que é condição necessária e suficiente para que o método de Jacobi seja convergente, independente da iterada inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, que se tenha $\alpha^2 < 12$.

(b) Com $\alpha = 1/2$, que pode dizer sobre a convergência do método de Gauss-Seidel? Com $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = [1\ 1\ 1]^T$, calcule $\mathbf{x}^{(1)}$ pelo **método de Gauss-Seidel.**

3. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) &= 10 \\ 3(x_2 + 1) + x_3^2 &= 11 \\ 3x_1 + x_3^2 &= 9 \end{aligned}$$

tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3\ 2\ 1]^T$.

(a) Mostre que o sistema linear $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenha ainda o vector $\mathbf{b}$.