Concluímos este capítulo com alguns Exercícios sobre a matéria do capítulo 2, provenientes de enunciados de exames.

EXERCÍCIOS

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

   (a) Prove que esta equação tem uma raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

   Solução. *Seja* $f(x) = \sin x - e^{-x}$. *Como* $f(0.5)f(0.7) < 0$, *fica provada a existência de pelo menos uma raiz no intervalo* $I = [0.5, 0.7]$. *Além disso, sendo* $f'(x) = \cos x + e^{-x} > 0$ *em* I, *a raiz é única.*

   (b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha z.

   Solução. $x_1 = 0.6$; *novo intervalo:* $I_1 = [0.5, 0.6]$.

   (c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

   Solução. *A partir de* $m = 18$ *pode-se garantir aquela precisão.*

2. Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0 \tag{2.20}$$

   (a) Localize graficamente as raízes da equação (4.4) e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

   Solução. *Reescrevendo a equação dada numa forma equivalente que permita recorrer a um esboço gráfico, tem-se*

$$3x^2 - e^x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = e^x \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ y = e^x \end{cases}$$

   As funções $\underline{y = x^2 \text{ e } y = x}$ intersectam-se, aparentemente, em três pontos, sendo as raízes da equação as respectivas projecções sobre o eixo dos xx. O gráfico indica, deste modo, uma raiz negativa e duas positivas. Para os localizarmos, analisemos os sinais de f em diversos pontos, sugeridos pelo gráfico. Tem-se $f(-1) = 2.63 > 0, f(0) = -1 < 0, f(1) = 0.281 > 0, f(3) = 6.31 > 0, f(4) = -6.59 < 0$. *Conclui-se que existe pelo menos uma raiz em cada um dos intervalos:* $[-1, 0], [0, 1], [3, 4]$. *Para confirmarmos o número total de raízes, calculemos as derivadas de* $f(x) = 3x^2 - e^x$. *Tem-se* $f'(x) = 6x - e^x$ *e* $f''(x) = 6 - e^x \Rightarrow f''$ *tem um só zero em* $x = \ln 6 \simeq 1.79$. *Então f' tem, no máximo, 2 zeros e, por conseguinte, f tem, no máximo, 3 zeros. Como há no máximo 3 zeros, então* ~~*existe*~~ *existe um só em cada um dos intervalos obtidos.*

deve estar: $y = 3x^2$ e $y = e^x$

Nota: em geral, se f' tem n zeros em $[a,b] = I$ então f tem, no máximo, n+1 zeros em I