Aula 5, 24/09/2007

Pontos fixos. Exemplos de sucessões geradas por funções

O que se entende por sucessão gerada por uma função $g(x)$?

Dado um valor x_0, obtém-se, sucessivamente:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = g(x_0)\\
&x_2 = g(x_1)\\
&x_3 = g(x_2)\\
&\vdots\\
&x_{m+1} = g(x_m)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

À sucessão assim definida chama-se *sucessão gerada por* g ou *método do ponto fixo associado a* g (ou ainda *iteração do ponto fixo*).

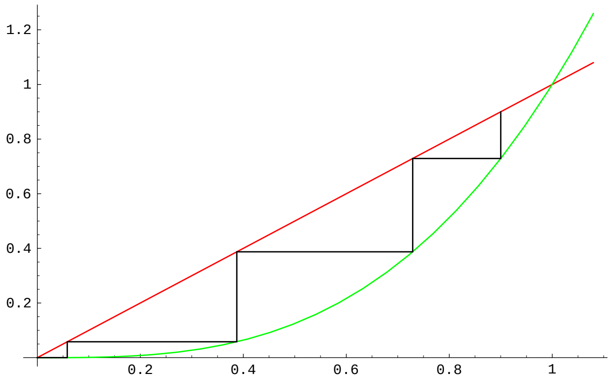
Exemplos

Sucessão do ponto fixo gerada por $g(x) = x^3$:

- Seja $x_0 = 0.9$. Obtém-se

$$
\begin{aligned}
&x_1 = g(x_0) = (x_0)^3 = (0.9)^3\\
&x_2 = g(x_1) = (x_1)^3 = ((0.9)^3)^3 = (0.9)^9\\
&x_3 = g(x_2) = (x_2)^3 = ((0.9)^9)^3 = (0.9)^{27}\\
&x_4 = g(x_3) = (x_3)^3 = ((0.9)^{27})^3 = (0.9)^{81}\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

  Obteve-se uma sucessão $x_0 = 0.9, \quad x_{m+1} = (x_m)^3, \quad m = 0, 1, 2...$, que converge para zero. Tem-se a seguinte ilustração gráfica do processo.



Partindo de $x_0 = 0.9$

Algumas iteradas (termos da sucessão), obtidas com o Mathematica :

$$x_0 = 0.9, \quad x_1 = 0.729, \quad x_2 = 0.387420489, \quad x_3 = 0.0581497,$$
$$x_4 = 0.000196627, \quad x_5 = 7.60203 \times 10^{-12}, \quad x_6 = 4.39329 \times 10^{-34},$$
$$x_7 = 8.47946 \times 10^{-101}, \quad x_8 = 6.09683 \times 10^{-301},$$
$$x_9 = 2.26628 \times 10^{-901}, \quad x_{10} = 1.16396 \times 10^{-2702}, ...$$

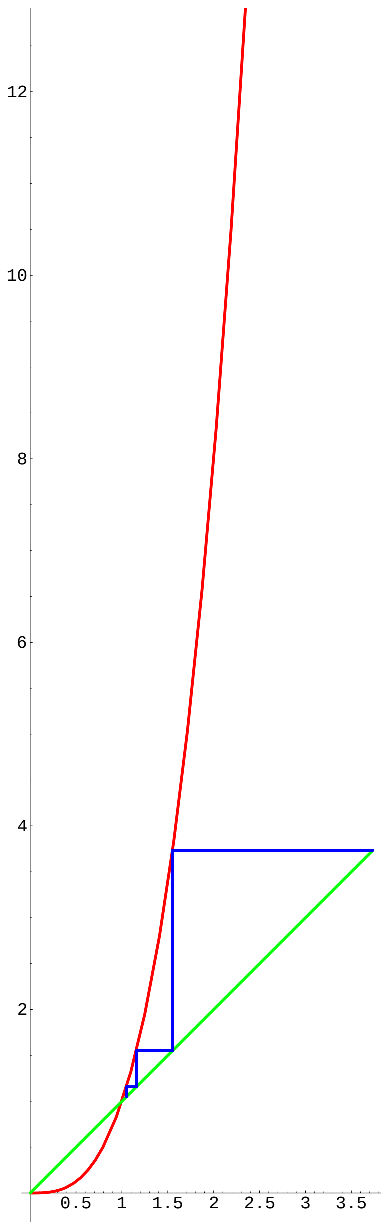
Seja ainda $g(x) = x^3$ mas com a escolha:

- $x_0 = 1$. Então, vem $x_1 = g(x_0) = (1)^3 = 1$, $x_2 = 1$,etc. É simples de constatar que, neste caso, se obtém a sucessão $x_m = 1, m = 0, 1, ...$, cujo limite é 1.
- E se $x_0 = -1$? Facilmente verificamos que vem $x_1 = (-1)^3 = -1$ e, de modo geral, obtém-se $x_m = -1, m = 0, 1, ...$, cujo limite é -1.

- Seja agora $x_0 = 1.05$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
&x_1 = g(x_0) = (1.05)^3 \simeq 1.15763 \\
&x_2 = g(x_1) = (x_1)^3 = ((1.05)^3)^3 = (1.05)^9 \simeq 1.55133 \\
&x_3 = g(x_2) = (x_2)^3 = ((1.05)^9)^3 = (1.05)^{27} \simeq 3.73346 \\
&x_4 = g(x_3) = (x_3)^3 = ((1.05)^{27})^3 = (1.05)^{81} \simeq 52.0395 \\
&\vdots \\
&x_7 \simeq 2.19279 \times 10^{46}, \quad x_8 \simeq 1.05437 \times 10^{139}, \quad x_9 \simeq 1.172124 \times 10^{417}, \ldots
\end{aligned}
$$

A sucessão tende para infinito. Segue-se a ilustração gráfica.



Seja $g(x) \in C[a,b]$ **e a sucessão associada** :

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, 2, ...$$

$$\begin{aligned} &x_0 \text{ dado} \\ &x_1 = g(x_0) \\ &x_2 = g(x_1) \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

- **a sucessão pode ou não ter limite**
- **Depende de** g **e de** x_0

Se existir limite finito

$$z = \lim_{m \to \infty} x_{m+1}$$

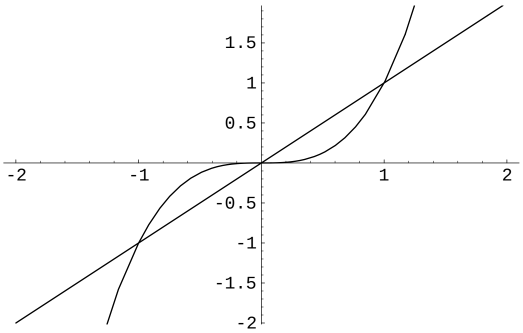
O que representa z ? Resposta: z é ponto fixo de g, o que demonstramos a seguir:

$$z = \lim_{m \to \infty} x_{m+1} = \lim_{m \to \infty} g(x_m) = g\left(\lim_{m \to \infty} x_m\right) = g(z)$$

- Assim, se uma sucessão gerada por uma função contínua é convergente, o seu limite é um ponto fixo de g.

- Os exemplos que considerámos estão de acordo com este resultado. Considerámos 3 exemplos de sucessões convergentes, associadas a g, com limites -1, 0 e 1. Estes limites são de facto pontos fixos de g, como já vimos e relembramos aqui:

  Os pontos fixos da função $g(x) = x^3$ são as soluções da equação $x = x^3$, ou seja: -1,0,1 . Geometricamente, o gráfico de g intersecta a recta $y = x$ em três pontos e os pontos fixos são as respectivas projecções no eixo dos xx.



Em seguida, consideramos o Teorema do ponto fixo, que nos permite responder às questões:

dada uma função g, definida num certo intervalo I,

- em que condições g tem um único ponto fixo em I e a sucessão $x_{m+1} = g(x_m)$ converge para esse ponto fixo?

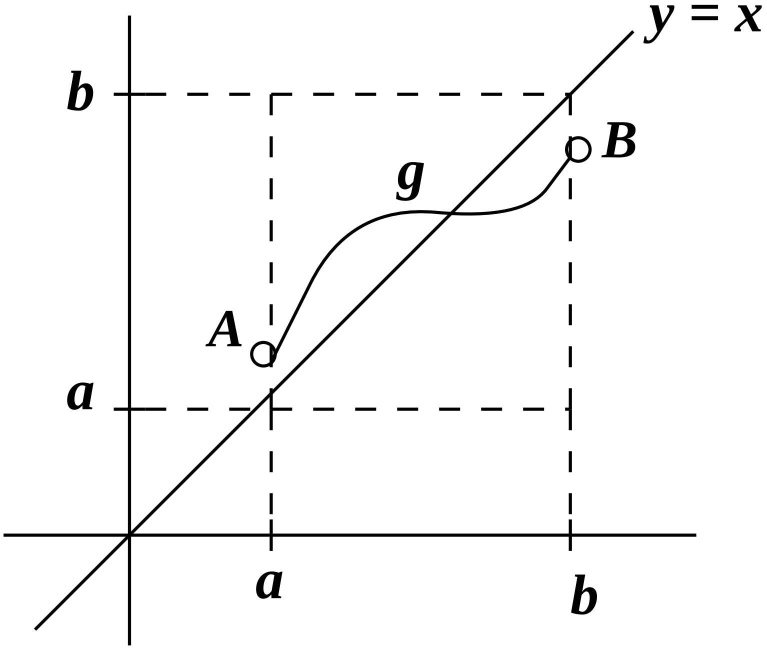
TEOREMA DO PONTO FIXO

Seja g **uma função definida em** $I = [a, b]$**, que satisfaz as seguintes condições**:

(**i**) g, g'contínuas em I

(**ii**) $g(I) \subset I$

(**iii**) $\max_{x \in [a,b]} |g'(x)| = L, \quad 0 < L < 1.$



Então:

(a) g **tem exactamente um ponto fixo em** I**. Ou seja, existe um único** $z \in [a, b]$ **tal que** $g(z) = z$.

(b) **A sucessão gerada por** g**, ou seja**,

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, 2, ...$$

converge para z **qualquer que seja a iterada inicial** x_0 **pertencente ao intervalo** $[a, b]$**.**