Exemplo apresentado na aula 6, 25/09/ 2007

Aplicação do teorema do ponto fixo

Considere a equação não linear

$$1 - x - \sin x = 0 \tag{1}$$

1. Mostre que a equação (1) tem uma única raiz $z \in [0,1]$.

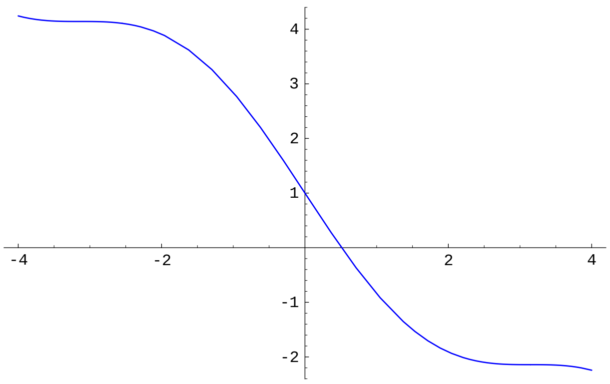
   Resolução.

   Definindo $f(x) = 1 - x - \sin x$, tem-se $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -\sin 1 < 0$; sendo f uma função contínua, resulta, pelo Teorema de Bolzano, que f tem pelo menos um zero no intervalo $I = [0,1]$. Por outro lado, $f'(x) = -1 - \cos x = -(1 + \cos x)$. Atendendo a que se tem $1 + \cos x > 0$ no intervalo $[0,1]$, então $f'(x) < 0$ em I e, consequentemente, f é decrescente em I, não podendo ter mais que um zero nesse intervalo.

   Usamos o Mathematica para fazer alguns gráficos

```
In[6]:=  f[x_] := 1 - x - Sin[ x]

Plot[f[x], {x, -4, 4}, PlotStyle → { RGBColor[0, 0, 1]}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



2. Pretende-se aproximar z por um método do ponto fixo, ou seja, por uma sucessão da forma $x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, 2, ...$

   (a) Por aplicação do Teorema do ponto fixo, mostre que a sucessão gerada pela função

   $$g(x) = (x + 1 - \sin x)/2 \tag{2}$$

   converge para z, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0,1]$.

   Resolução

Passo 1. *Se forem satisfeitas as condições do Teorema do Ponto Fixo no intervalo $I = [0, 1]$ para a função g, então prova-se a existência dum único ponto fixo para g em I e a convergência da sucessão $x_{m+1} = g(x_m)$ para esse ponto fixo.*

i) *g, g' contínuas em I?*

Tem-se $g(x) = (1/2)(x + 1 - \sin x)$ e $g'(x) = (1/2)(1 - \cos x)$, que são obviamente contínuas (soma de funções contínuas em I, multiplicadas pela constante 1/2).

ii) *Verifica -se* $\; g(I) \subset I$*?*

Ou seja, as imagens por g de qualquer $x \in I$ pertencem a I? Como $g' > 0$, resulta que g é crescente. Então, para concluir que $g(I) \subset I$ basta verificar se as imagens dos extremos estão em I. Dado que $g(0) = 1/2 \in I$ e $g(1) = 0.579 \in I$ a monotonia de g permite concluir imediatamente o pretendido, ou seja, que $g(x) \in I, \forall x \in I$.

iii) *Verifica-se* $\; \max_{x \in I} |g'(x)| = L, \; 0 < L < 1$*?*

Sendo $g' > 0$ em I, tem-se

$$|g'(x)| = g'(x) = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow g''(x) = \frac{\sin x}{2} > 0 \; \forall x \in I$$

Então g' é positiva e crescente em I. Logo

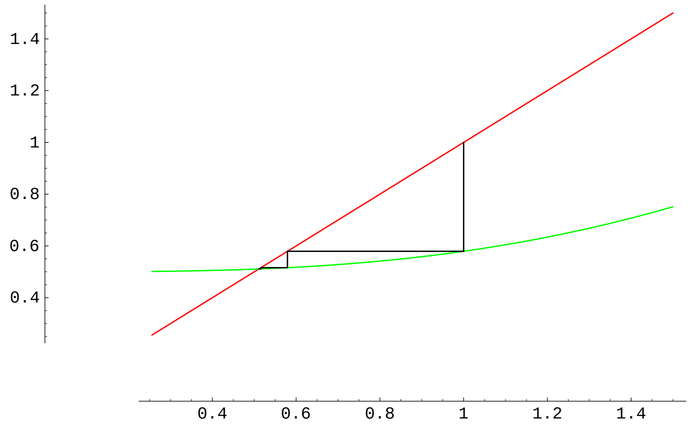
$\max_{x \in I} |g'(x)| = g'(1) = 0.2296$. Então verifica-se iii) com $L = 0.2296$.

Conclusões: Pelo Teorema do ponto fixo, resulta: g tem um único ponto fixo em $I = [0, 1]$ e a sucessão

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

converge para esse ponto fixo, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 escolhida em $[0, 1]$.

A figura seguinte ilustra a convergência do processo iterativo associado a g para o ponto fixo de g, começando com $x_0 = 1$. Tem-se $x_1 \simeq 0.5792645$, $x_2 \simeq 0.5159280$, $x_3 \simeq 0.5112986$.



Calculando algumas iteradas com o Mathematica (comando NestList), o ponto fixo (raiz z) parece estar próximo de 0.51097.

```
N[NestList[g, 1.0, 10], 16]
```

```
{1., 0.5792645075960517, 0.5159279654502127, 0.511292863508953,
 0.5109938427034604, 0.5109747331472184, 0.5109735126540478,
 0.510973434706366, 0.5109734297281932, 0.5109734294102593, 0.5109734293899544}
```

Passo 2. Finalmente provemos que o ponto fixo de g em I coincide com a raiz z da equação (1). Dessa forma, poderemos realmente concluir que a sucessão (3) converge para z.

Tem-se que x é ponto fixo de g se e só se verifica $x = g(x)$, ou seja,

$$x = \frac{x+1-\sin x}{2} \quad \Leftrightarrow 2x = x + 1 - \sin x \tag{4}$$

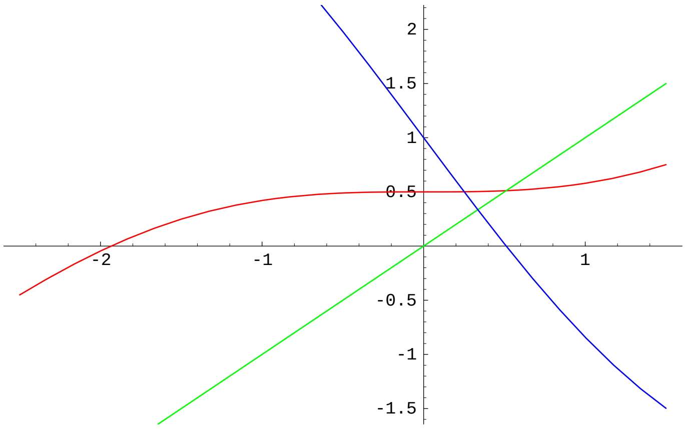
$$\Leftrightarrow 0 = -2x + x + 1 - \sin x \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1 - x - \sin x}_{f(x)} = 0 \tag{6}$$

Provámos que: $x = \underbrace{\frac{x+1-\sin x}{2}}_{g(x)} \Leftrightarrow \underbrace{1 - x - \sin x}_{f(x)} = 0$ A relação acima diz-nos que os pontos fixos de g coincidem com as raizes da equação $f(x) = 0$ no intervalo I. Como só existe uma raiz z, ela é também o único ponto fixo de g em I.

A figura seguinte mostra os gráficos de f (azul) e de g (vermelho) bem como o da recta $y = x$ (verde). Note que o zero de f (ponto onde intersecta o eixo dos xx) é o ponto fixo de g (projecção do ponto de intersecção de g com a recta $y = x$.

```
In[23]:=
        Plot[{g[x], x,  f[x]}, {x, -2.5, 1.5}, PlotStyle ->
          {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



(b) Tomando $x_0 = 0$, obtenha os termos (iteradas) x_1, x_2 da sucessão (3). Ao usarmos x_2 para valor aproximado da raiz z da equação (1), calcule um majorante para o erro cometido $|z - x_2|$.

Resolução. O termo geral da sucessão é:

$$x_{m+1} = g(x_m) = \frac{x_m + 1 - \sin x_m}{2}, \quad m \geq 0$$

Fazendo $x_0 = 1$, vem

$$x_1 = g(x_0) = g(1) = \frac{1 + 1 - \sin 1}{2} \simeq 0.5792646 \tag{7}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{x_1 + 1 - \sin x_1}{2} \simeq 0.5159280 \tag{8}$$

Para obter um majorante para o erro de x_2, podemos usar a seguinte fórmula:

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{L}{1 - L} |x_{m+1} - x_m|, \quad m \geq 0, \tag{9}$$

que pressupôe termos já calculado x_m e x_{m+1}. Fazendo $m = 1$, vem:

$$|z - x_2| \leq \frac{L}{1 - L} |x_2 - x_1|$$

Substituindo $L = 0.2296$ e os valores obtidos x_1, x_2, somos conduzidos ao majorante: $|z - x_2| \leq 0.019$.
Em vez de (9), poderíamos usar

$$|z - x_m| \leq L^m\, |z - x_0|, \qquad (10)$$

em que é preciso um majorante para o erro da iterada inicial. Viria, com $m = 2$:

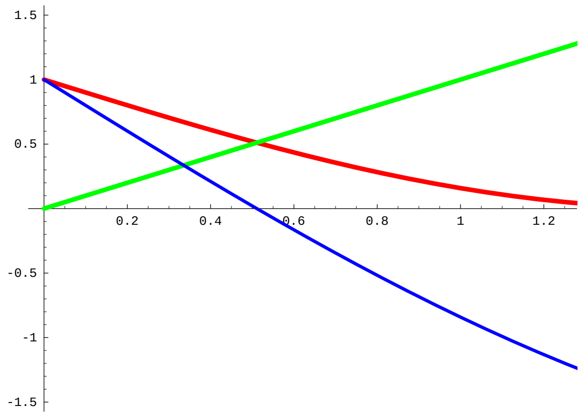
$$|z - x_2| \leq L^2 |z - x_0| \leq (0.23)^2 \simeq 0.053,$$

onde usámos a estimativa "grosseira" $|z - x_0| \leq 1$ (comprimento do intervalo onde z e x_0 se situam). Note-se que a primeira fórmula deu um majorante mais pequeno.

(c) Qual o número k de iterações que deveria efectuar de modo a garantir um erro $|z - x_k| \leq 10^{-5}|$? **Solução**: $k = 8$.

3. Questão adicional: Reescreva a equação $1 - x - sinx = 0$ na forma equivalente $x = 1 - sinx$. Qual o método do ponto fixo $x_{m+1} = g_1(x_m)$ que ela nos sugere ? Tem-se graficamente:

```
Plot[{g1[x], x, f[x]}, {x, 0, 1.5},
 PlotStyle → {{Thickness[0.007], RGBColor[1, 0, 0]},
                       {Thickness[0.007] , RGBColor[0, 1, 0]},
   {Thickness[0.005] , RGBColor[0, 0, 1]}} ]
```



Com o comando NestList, obtiveram-se as iteradas abaixo. Comente quanto à rapidez de convergência do método.

```
In[3]:=
        N[NestList[g1, 1.0, 20], 16]

Out[3]= {1., 0.158529, 0.842134, 0.253934, 0.748786, 0.31925, 0.686146,
         0.36644, 0.641706, 0.401437, 0.609258, 0.427741, 0.585184, 0.447647,
         0.567154, 0.462766, 0.553575, 0.474268, 0.543312, 0.483026, 0.535539}
```