6 Métodos numéricos para problemas de valor inicial

6.1 Introdução

Começamos com alguns exemplos

Exemplo 6.1

A equação

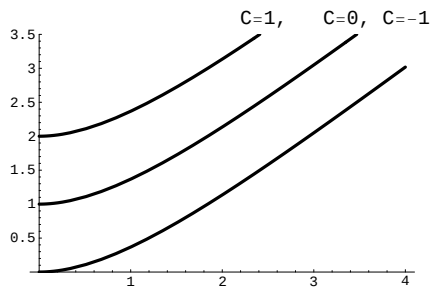
$$\frac{dy}{dx} = 1 - e^{-x} \tag{6.1}$$

é uma equação diferencial pois envolve a derivada $\frac{dy}{dx}$ (ou $y'(x)$) da função incógnita $y(x)$. Primitivando o lado direito, obtém-se

$$y(x) = x + e^{-x} + C, \quad C \in I\!R \tag{6.2}$$

Todas as funções da forma (6.2) são soluções de (6.1), visto que verificam a condição $y'(x) = 1 - e^{-x}$. Elas constituem uma família de soluções: a cada valor de C corresponde uma função que é solução de (6.1). A figura abaixo mostra os seguintes exemplos:

$$\begin{aligned} C = 0 \quad &\Rightarrow y(x) = x + e^{-x} \\ C = 1 \quad &\Rightarrow y(x) = x + e^{-x} + 1 \\ C = -1 \quad &\Rightarrow y(x) = x + e^{-x} - 1 \end{aligned}$$



Exemplo 6.2

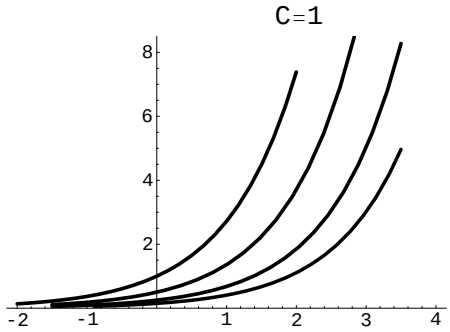
Na equação

$$y'(x) = y(x) \tag{6.3}$$

o lado direito agora também envolve a função incógnita $y(x)$. Pretende-se $y(x)$ tal que a sua derivada $y'(x)$ coincide com a própria $y(x)$. As soluções de (6.3) têm a forma

$$y(x) = C\,e^x, \qquad C \in I\!R \tag{6.4}$$

Com efeito, derivando (6.4) em ordem a x, vem $y'(x) = Ce^x = y(x)$. Graficamente tem-se uma família de curvas descritas por (6.4). A figura seguinte mostra algumas dessas curvas, em particular, o caso da função $y(x) = e^x$, que corresponde a escolher $C = 1$.



Problema de valor inicial

Ao problema da forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a \le x \le b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.5}$$

chamamos problema de valor inicial. Uma solução do problema acima será uma função diferenciável $y(x)$ que, substituída em $f(x, y)$, conduz à igualdade $y'(x) = f(x, y(x))$ e tal que $y(x_0) = y_0$. Ou seja, a curva $y = y(x)$ deve verificar a equação diferencial e a condição inicial.

Exemplo 6.3

Associando uma condição inicial à equação (6.3), obtém-se o par

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.6}$$

Vimos que a solução geral de (6.3) é $y(x) = Ce^x$ (cf. (6.4)). Estamos interessados na curva $y(x)$ que, num determinado ponto x_0, toma o valor y_0. Ela corresponde a uma escolha bem determinada da constante C. Impondo a condição $y(x_0) = y_0$, vem $Ce^{x_0} = y_0$, donde $C = e^{-x_0}y_0$ e, finalmente, a solução do problema (6.6) é $y(x) = y_0\ e^{x-x_0}$. Em particular, a solução que em $x_0 = 1$ toma o valor 1 é $y(x) = e^x$, a qual corresponde à escolha $C = 1$.

Exemplo 6.4

Consideremos a equação

$$y'(x) = -K(y(x) - A), \tag{6.7}$$

onde $y(x)$ representa a temperatura, num instante x, dum objecto que está imerso num meio à temperatura A. A equação (6.7) descreve a evolução da temperatura desse objecto, sendo a taxa de variação da temperatura proporcional à diferença $y - A$.

Suponhamos que é conhecida a temperatura do objecto no instante $t = 0$, dada por $y(0) = y_0$. Tem-se então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -K(y(x) - A) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{6.8}$$

que tem por solução

$$y(x) = A + (y_0 - A)\ e^{-Kx} \tag{6.9}$$

A cada valor de y_0 está associada uma curva diferente. Se $y_0 < A$, então o objecto tende a aquecer; se $y_0 > A$, então o objecto tende a arrefecer. Em qualquer dos casos, a temperatura do objecto aproximar-se-á da do meio.

Observação 6.1

É possível provar que a solução dum problema da forma

$$y'(x) = u(x)\, y + v(x), \quad y(x_0) = y_0$$

é a seguinte:

$$y(x) = y_0\, e^{U(x)} + e^{U(x)} \int_{x_0}^{x} v(s) e^{-U(s)} ds, \quad \text{onde } U(x) = \int_{x_0}^{x} u(s) ds \tag{6.10}$$

Na equação do exemplo anterior, tem-se $y'(x) = -K\, y(x) + K\, A$, donde $u(x) = K$ e $v(x) = K\, A$. Aplicando a fórmula (6.10) chega-se a (6.9).

Teorema (Existência e unicidade de solução)

Seja $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty\}$ e seja $f(x, y)$ uma função contínua em D. Se existe uma constante positiva K tal que

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K, \qquad \forall (x, y) \in D, \tag{6.11}$$

então o problema de valor inicial (6.5) tem uma única solução $y(x)$, definida em $[a, b]$.

Exemplo 6.5

Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + x\, sin(x\, y(x)), \quad 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

Definindo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \quad -\infty < y < +\infty\}$, tem-se que $f(x, y) = 1 + x\, sin(xy)$ é uma função contínua em D. Como

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = \left|x^2\, cos(xy)\right| \leq 4, \quad (x, y) \in D,$$

então, pelo teorema anterior, conclui-se que o problema tem uma única solução $y(x)$ definida em $[0, 2]$.

6.2 Métodos de Taylor

Em geral não é possível determinar uma expressão explícita para a solução $y(x)$ do problema de valor inicial (6.5).

Nos métodos numéricos que vamos estudar, divide-se o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de comprimento h, através de uma "rede" ou "malha" de pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b. \tag{6.13}$$

Tem-se $h = (b - a)/N$ e $x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, ...N$. Obtém-se, não a expressão explícita de uma função que aproxima $y(x)$, mas aproximações para os valores $y(x_i), i =, 1, ..., N$. É costume designar por y_i uma aproximação de $y(x_i)$. Assim, vamos obter um conjunto de valores aproximados $y_1, y_2, ..., y_N$ para $y(x_1), y(x_2), ..., y(x_N)$, respectivamente.

O Método de Euler

Dado o valor inicial $y(x_0) = y_0$, começa-se por obter uma aproximação, y_1, para $y(x_1)$. No método de Euler, traça-se a recta $r(x)$ tangente ao gráfico de $y(x)$ no ponto $(x_0, \underbrace{y(x_0)}_{y_0})$ e toma-se para y_1 o seu valor em $x = x_1$. Como o declive da recta tangente é dado pelo valor da derivada naquele ponto, ou seja, $y'(x_0)$, vem

$$r(x) = y_0 + (x - x_0)y'(x_0) \tag{6.14}$$

Da equação dada em (6.5), $y'(x) = f(x, y(x))$, obtém-se $y'(x_0) = f(x_0, \underbrace{y(x_0)}_{y_0})$, vem

$$r(x) = y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0) \tag{6.15}$$

Fazendo $x = x_1$, então $r(x_1) = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$. Sendo h o espaçamento entre os pontos, obtém-se para aproximação de $y(x_1)$:

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0) \tag{6.16}$$

Exemplo 6.6

Seja o problema

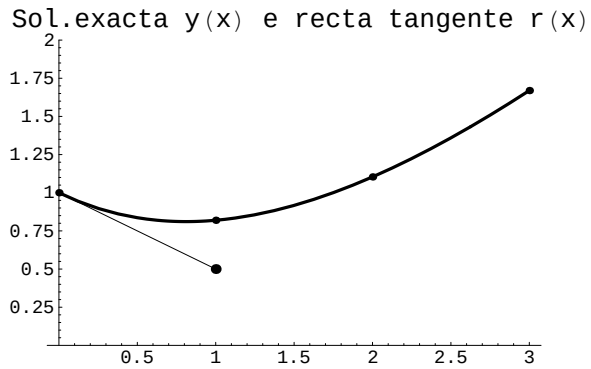
$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x - y(x)}{2} \quad (= f(x, y(x))), \quad x \in [0, 3], \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{6.17}$$

Tem-se

$$f(x, y) = \frac{x - y}{2} \tag{6.18}$$

Além disso, $x_0 = 0, \quad y_0 = 1$. Se considerarmos uma malha de pontos, com espaçamento $h = 1$ no intervalo $[0, 2]$, então resulta: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Neste caso especial, a aplicação da fórmula (6.10), conduz à solução exacta: $y(x) = 3e^{-x/2} - 2 + x$. A figura seguinte mostra o gráfico de $y(x)$ e a recta tangente $r(x)$ definida por (6.14). Sendo $y'(x) = -(3/2)e^{-3/2} + 1$, pode calcular-se o declive da tangente: $y'(0) = -1/2$. Então a recta tangente em $(0, 1)$ é: $r(x) = 1 - x/2$. Fazendo $x = x_1 = 1$ obtém-se $y_1 = 1 - 1/2 = 0.5$.



É claro que, na prática, para obter a aproximação y_1 bastará aplicar directamente a fórmula (6.16), do seguinte modo.

Atendendo a (6.18), vem:

$$f(x_0, y_0) = \frac{x_0 - y_0}{2} = -1/2$$

Logo

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0) = 1 - \frac{h}{2}$$

Como escolhemos para espaçamento o valor $h = 1$, vem $y_1 = 1/2$ para aproximação de $y(x_1)$.

De maneira análoga a $y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$, se podem definir, sucessivamente

y_2, y_3, ..., y_N:

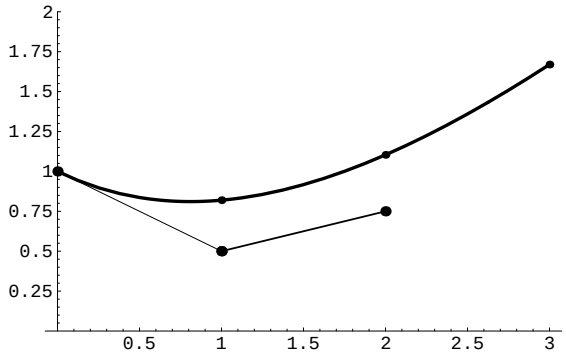
$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h\, f(x_1, y_1) \\ y_3 &= y_2 + h\, f(x_2, y_2) \\ y_4 &= y_3 + h\, f(x_3, y_3) \\ y_N &= y_{N-1} + h\, f(x_{N-1}, y_{N-1}) \end{aligned}$$

Por exemplo para obter y_2, traça-se uma recta partindo de (x_1, y_1), com declive $f(x_1, y_1)$, e o seu valor em $x = x_2$ é y_2. Notemos que o declive da recta tangente em $(x_1, y(x_1))$, ao gráfico de $y(x)$, é agora $y'(x_1) = f(x_1, y(x_1))$. Como não dispomos do valor exacto $y(x_1)$ usamos a aproximação y_1 obtida anteriormente. Vem

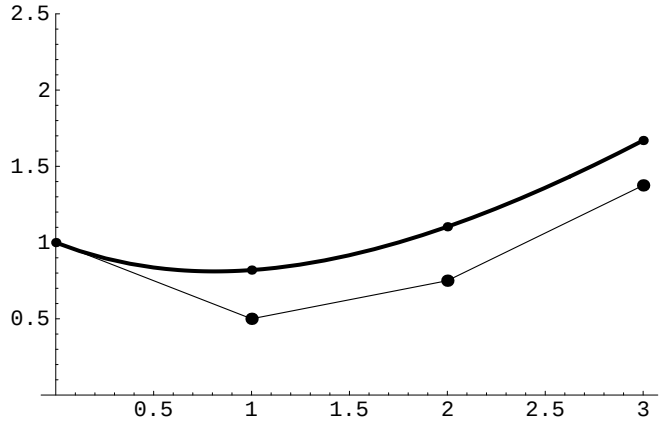
$$y'(x_1) = f(x_1, y(x_1)) \simeq f(x_1, y_1) \tag{6.19}$$

pelo que $f(x_1, y_1)$ representa, em geral, apenas uma aproximação para o declive da tangente. Raciocínio semelhante pode ser aplicado na obtenção dos valores $y_2, y_3, ..., y_N$.

Exemplo 6.7 *A figura seguinte ilustra o que se disse acima em relação ao modo como se obtém y_2 e mostra o segmento de recta partindo de (x_1, y_1), com declive $f(x_1, y_1)$:*



Na figura abaixo, mostram-se os valores exactos $y(1), y(2), y(3)$ (marcados sobre o gráfico de $y(x)$) e os respectivos valores aproximados obtidos pelo método de Euler, com $h = 1$:



Dedução teórica da fórmula geral do método de Euler

A partir de y_1 podem-se obter, sucessivamente, y_2, y_3,.... Supondo que já foram obtidas as aproximações $y_1, \ldots, y_n$, vejamos como obter y_{n+1}. Geometricamente, traçamos uma recta a partir do ponto (x_n, y_n), com declive $f(x_n, y_n)$, e toma-se para y_{n+1} o valor da recta em $x = x_{n+1}$.

Consideremos o desenvolvimento de Taylor para $y(x)$, em torno de x_n:

$$y(x) = y(x_n) + (x - x_n)\ y'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2} y''(\xi_n) \tag{6.20}$$

onde $\xi_n \in [x_n, x_{n+1}]$. Fazendo $x = x_{n+1}$, obtém-se

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (x_{n+1} - x_n)\ y'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} y''(\xi_n) \tag{6.21}$$

ou seja, com $h = x_{n+1} - x_n$,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\ y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \tag{6.22}$$

Desprezando o termo de resto $T = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$, obtém -se uma aproximação para $y(x_{n+1})$:

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + h\ y'(x_n) \tag{6.23}$$

Em seguida, como em princípio só dispomos do valor aproximado y_n, usamo-lo no lugar de $y(x_n)$. Por outro lado, reescrevendo y' em função de f, vem:

$$y'(x_n) = f(x_n, \underbrace{y(x_n)}_{y_n}) \simeq f(x_n, y_n)$$

Desprezando ainda o termo de resto, resulta a aproximação:

$$y(x_{n+1}) \simeq y_n + h\ f(x_n, y_n) \tag{6.24}$$

e somos conduzidos à fórmula geral:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n) \tag{6.25}$$

Fórmula do erro do método de Euler

Teorema 6.1 *Considere-se o problema de valor inicial (6.5). Sejam $y_1, y_2, ..., y_N$ valores aproximados para $y(x_1), y(x_2), ..., y(x_N)$, respectivamente, obtidos pelo método de Euler.*

Suponhamos que $f(x, y)$ é uma função contínua em $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty\}$, e que existe uma constante positiva K tal que

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K, \qquad \forall (x, y) \in D \tag{6.26}$$

Então, como já se disse, o problema de valor inicial (6.5) tem uma única solução $y(x)$, definida em $[a, b]$. Seja, além disso, $y \in C^2[a, b]$ tal que $|y''(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$. Então é válida a seguinte fórmula para o erro global $|y(x_n) - y_n|$:

$$|e_n| = |y(x_n) - y_n| \leq \frac{h\, M}{2K} \left(e^{K(x_n - x_0)} - 1 \right), \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1. \tag{6.27}$$

A fórmula (6.27) mostra que o erro num determinado ponto $x = x_0 + nh$ satisfaz:

$$|e_n| = |y(x_n) - y_n| \leq C^* \, h. \tag{6.28}$$

Quando se faz h tender para zero, o erro nesse ponto tende para zero, pelo que nas condições do teorema enunciado, o método de Euler converge. Atendendo ao expoente unitário de h, diz-se que o método de Euler é um método de ordem 1.

Isso tem como consequência prática o seguinte: ao diminuir-se o valor do passo h para $h/2$, espera-se que os erros na solução aproximada venham aproximadamente divididos por 2.

Definição 6.1 *Um método diz-se convergente com ordem p se*

$$e(h) = max_{n=0,\ldots,N-1}|e_n| \leq C^* \, h^p \tag{6.29}$$

O Método de Taylor de ordem 2

O método de Euler foi deduzido considerando o desenvolvimento de Taylor de primeira ordem da solução exacta $y(x)$ e desprezando o respectivo termo de resto de ordem 2.

Para obter métodos de ordens mais elevadas (em que os erros tendem para zero mais rapidamente), consideram-se mais termos no desenvolvimento de Taylor. No método de Taylor de ordem 2 vai-se até ao resto de ordem 3. Vejamos como, em geral, se obtém uma aproximação para $y(x_{n+1})$ a partir da aproximação para $y(x_n)$. Por outras palavras, como obter y_{n+1}, supondo que já foram obtidas $y_1, y_2, ..., y_n$.

Supondo que $y(x)$ tem derivadas contínuas até à terceira ordem, consideremos o desenvolvimento de Taylor de $y(x)$ em torno de x_n:

$$y(x) = y(x_n) + (x - x_n)\; y'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2} y''(x_n) + \frac{(x - x_n)^3}{3!} y'''(\xi_n) \tag{6.30}$$

onde $\xi_n \in [x_n, x_{n+1}]$. Fazendo $x = x_{n+1}$, obtém-se

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (x_{n+1} - x_n)\; y'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} y''(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)}{3!} y'''(\xi_n) \tag{6.31}$$

ou seja, com $h = x_{n+1} - x_n$,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\; y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(\xi_n) \tag{6.32}$$

Desprezando o termo de resto, $T_{n+1} = \dfrac{h^3}{3!} y'''(\xi_n)$, resulta a aproximação:

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + h\ y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) \tag{6.33}$$

A seguir, expressemos as derivadas em termos da função f. Tem-se $y'(x) = f(x, y(x))$, donde, tal como no método de Euler, resulta imediatamente $y'(x_n) = f(x, y(x_n))$. Como em geral $y(x_n)$ é desconhecido (apenas dispomos de $y(x_0) = y_0$), usamos, no seu lugar, o valor aproximado y_n.

Para obter a segunda derivada, usamos a regra da derivação da função composta

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x, y(x))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx}$$

Donde

$$\begin{aligned} y''(x_n) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y(x_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n))y'(x_n) && (6.34) \\ &\simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)y'(x_n) && (6.35) \end{aligned}$$

Obtém-se a expressão geral do método de Taylor de ordem 2

$$y_{n+1} = y_n + h\ f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)f(x_n, y_n)\right], \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1 \tag{6.36}$$

Poderemos representar esta fórmula de modo mais compacto,

$$y_{n+1} = y_n + h\ y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n, \tag{6.37}$$

onde

$$\begin{aligned} y'_n &= f(x_n, y_n), \\ y''_n &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)f(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Exemplo 6.8

Obtenha uma aproximação para $y(1)$, com $h = 1$ e $h = 1/2$.

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x - y(x)}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Com o fim de usar a fórmula (6.37), vamos começar por obter as expressões aproximadas para as derivadas.

Tem-se

$$y'(x_n) = \frac{x_n - y(x_n)}{2} \simeq \frac{x_n - y_n}{2} \tag{6.38}$$

$$y''(x) = \left(\frac{x - y(x)}{2}\right)' = \frac{1 - y'(x)}{2} \tag{6.39}$$

$$y''(x_n) = \frac{1 - y'(x_n)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_n - y(x_n)}{2}\right) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - y'_n}{2}\right) \tag{6.40}$$

Obtém-se a expressão do método de Taylor de ordem 2

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{x_n - y_n}{2} + \frac{h^2}{2}\,\left(\frac{1}{2} - \frac{x_n - y_n}{4}\right) \tag{6.41}$$

Note-se que esta fórmula se poderia obter por aplicação de (6.36), depois de calcularmos as derivadas parciais de $f(x, y) = (x - y)/2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{2}$$

Viria:

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{x_n - y_n}{2} + \frac{h^2}{2}\,\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(x_n, y_n)\right), \tag{6.42}$$

o que conduz a (6.41).

i) Com $h = 1$, tem-se que o ponto $x = 1$ corresponde a x_1, pelo que uma aproximação para $y(1)$ será y_1. Vem

$$y_1 = y_0 + h\frac{x_0 - y_0}{2} + \frac{h^2}{2}\,\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0 - y_0}{4}\right) = y_0 + \frac{x_0 - y_0}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x_0 - y_0}{4}\right) = 0.875$$

ii) Com $h = 1/2$, tem-se $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$. O ponto 1 corresponde agora a x_2, pelo que se pretende y_2. Primeiramente é preciso calcular y_1. Note-se que $y_1 \simeq y(x_1)$,

ou seja, atendendo a que $x_1 = 1/2$, representa uma aproximação para $y(1/2)$. A fórmula geral do método agora é:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{x_n - y_n}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{x_n - y_n}{4}\right)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{x_0 - y_0}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0 - y_0}{4}\right) = 0.84375$$

$$y_2 = y_1 + \frac{x_1 - y_1}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{x_1 - y_1}{4}\right) = 0.831055$$

6.3 Métodos de Runge Kutta

Concluímos estas notas sobre métodos numéricos para problemas de valor inicial com os métodos de Runge Kutta, que conduzem à mesma precisão que os métodos de Taylor, mas sem o inconveniente de terem de se calcular as derivadas de $y(x)$. Apresentamos dois exemplos de métodos de Runge Kutta, da forma:

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1\, V_1 + c_2\, V_2)$$

com
$V_1 = f(x_n, y_n)$
$V_2 = f(x_n + a_2\, h, y_n + b_2\, h\, V_1)$

onde c_1, c_2, a_2, b_2 são determinadas de modo a obter-se a precisão do método de Taylor de ordem 2.

Casos particulares

	c_2	c_1	a_2	b_2
Mét. do ponto médio	1	0	1/2	1/2
Mét. de Heun	1/2	1/2	1	1

Somos conduzidos aos dois seguintes métodos de Runge-Kutta de ordem 2:

Método do ponto médio (ou Euler modificado):

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)) \tag{6.43}$$

Método de Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \tag{6.44}$$

Concluímos com um método por vezes designado "método de Runge Kutta clássico", o qual é um **método de Runge-Kutta de ordem 4**:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4)$$

$$V_1 = f(x_n, y_n) \quad V_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}V_1)$$

$$V_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}V_2) \quad V_4 = f(x_n + h, y_n + hV_3)$$

Exemplo 6.9

Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x^2}{y(x)} \\ y(1) = -1 \end{cases} \tag{6.45}$$

Obtenha uma aproximação para $y(1.2)$, pelo método do ponto médio, com $h = 0.2$.

Tem-se $f(x, y) = x^2/y, \quad x_0 = 1$ e $y_0 = -1$.

A fórmula (6.43), com $n = 0$, dá

$$y_1 = y_0 + hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0))$$

Sendo $f(x_0, y_0) = x_0^2/y_0 = -1$, tem-se

$$y_1 = -1 + 0.2\, f(1 + \frac{0.2}{2}, -1 + \frac{0.2}{2}(-1))$$

Vemos que precisamos do valor $f(1.1, -0.9) = \dfrac{(1.1)^2}{-1.1}$. Substituindo acima, obtém-se $y_1 = -1 + 0.2(-1.1) = -1.22$