Sucessões

Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa:
António St. Aubyn, Maria Carlos Figueiredo,
Luís de Loura, Luísa Ribeiro, Francisco Viegas

Lisboa, Março de 2004

O documento presente foi obtido directamente do código TeX fornecido pelos autores com alterações de formatação e alguma revisão editorial. A versão corrente é de 29 de Dezembro de 2005. A revisão deste texto do ponto de vista gráfico ainda não está completa. Novas versões poderão ficar disponíveis no futuro a partir de http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutlsucessoes.pdf. O DMIST agradece ao Grupo de Matemática da UTL a possibilidade de facultar o texto aos alunos das disciplinas introdutórias de Matemática do IST.

Na mesma série:

- Lógica matemática.
- Conjuntos.
- Números reais.
- Sucessões.
- Funções.
- Funções reais de variável real.
- Funções trigonométricas.
- Função exponencial.
- Continuidade.
- Derivadas.

Nota do editor

Este texto está organizado na forma de um *diálogo socrático* entre dois personagens simplesmente identificados como **A** e **B** que podemos imaginar como amigos nos papéis de mestre e discípulo à mesa de um café. Os diálogos socráticos são uma tradição antiga na exposição científica ou pedagógica tendo originado nos *Diálogos* de Platão onde um dos intervenientes era Sócrates. O leitor suspenda a sua surpresa em relação a ver Matemática tratada desta forma e venha tomar um café connosco. As pausas sugeridas pelo autor estão convenientemente assinaladas com uma chávena de café!

Sucessões

Noção de sucessão e processos de dar uma sucessão

Foi então que peguei na caneta e comecei a escrever:

$$2,\ 10,\ 50,\ 0,\ 100,\ -3,\ -4,\ -5,\ 525,\ 15,\ 200$$

Um cansaço na mão fez-me parar e o meu interlocutor perguntou-me:

B Então é isto um exemplo de uma sucessão?

A Não! é preciso continuar (e continuei):

$$3,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ 335,\ -557,\ -\sqrt{8},\ -\sqrt{2001},\ 325$$

Achei demais e parei definitivamente.

B Temos finalmente um exemplo de uma sucessão.

A Não!

B Não te entendo. Tinhas-me prometido um exemplo de uma sucessão...

A Penso que devemos suspender, por momentos, essa promessa e estabelecer alguma terminologia.

Qual foi o primeiro número que escrevi?

B Foi o número 2.

A Pois a esse, que esteve no início, digo que é o *primeiro termo* (ou termo de ordem 1) da minha sucessão u, e designo-o por u_1.

Qual seria, na tua opinião, o *segundo termo* da sucessão u?

B O número 10 e designá-lo-ia por u_2.

A Diz-me agora qual a *ordem* do último termo que escrevi na primeira lista.

B A ordem é 11 e o termo correspondente, o u_{11}, é 200.

A Diz-me agora quais foram as ordens do primeiro e último termo que escrevi na segunda lista.

B A ordem 12, sendo $u_{12} = 3$, e a ordem 20, sendo $u_{20} = 325$.

A Pois bem, da minha sucessão u escrevi os termos u_1 a u_{20} — em que ordem achas que acabaria a minha sucessão?

B Não sei! És tu que me estás a dar o primeiro exemplo...

A Tens razão. E digo-te agora que, por muito tempo que vivesse, nunca acabaria por te dar o termo com a maior ordem...

B A ordem é assim tão grande?

A Mais do que possas imaginar! Mesmo que depois de morto, outro e outro me substituíssem, e tantos quantos possas pensar, nunca ninguém te diria qual o último termo da minha sucessão u.

B Isso parece-me uma aberração! Se assim fosse eu nunca saberia qual é a tua sucessão u.

A Mais uma vez tens razão. Eu não posso dar a sucessão u, *nem qualquer outra, desta forma*. Por outras palavras, nem eu, nem ninguém, te pode dar uma sucessão escrevendo explicitamente a sequência de todos os seus termos, uma vez que *as ordens podem ser tão grandes quanto queiras*.

B Então não existem sucessões, pois que ninguém as pode dar.

A Falso. O que eu te disse foi que ninguém pode dar um exemplo de uma sucessão *desta forma*. Mas existem formas de dar uma sucessão.

B Isso é demais! Porque insistes na forma de dar o que eu não sei o que é?

A Já vais ver. Considera a sucessão v dada por

$$v_n = \frac{1}{n}$$

para todo o n natural.

B O que é que isto tem a ver com o que me estavas a dizer?

A Comecei com a sucessão u e para ela sabias o que era o primeiro termo. Qual era?

B Era... deixa-me ver... o número dois.

A Que designavas por...

B Por u_1.

A Então qual será o primeiro termo da sucessão v?

B É v_1. Devo portanto fazer $n = 1$ e assim $v_1 = 1$.

A Qual será o termo de ordem 20?

B É v_{20}. Fazendo $n = 20$, temos $v_{20} = \dfrac{1}{20}$.

A Se pensares numa qualquer ordem k, qual será o termo com essa ordem?

B É v_k.

A E qual será o seu valor?

B $v_k = \dfrac{1}{k}$.

A Então, qualquer que seja a ordem, e por maior que ela seja, tu sabes o termo com essa ordem.

B É verdade! Mas quase parece um milagre dar assim uma coisa que nunca acaba. Onde está o segredo?

A O segredo está numa coisa que já conheces — os números naturais. Desde que tu saibas o que são os números naturais, podes escrever

$$v_n = \frac{1}{n}$$

para todo o número natural n, ou ainda

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad v_n = \frac{1}{n}$$

supondo-se aqui que $\mathbb{N}$ designa o conjunto de todos os números naturais.

B Penso que compreendi este exemplo de uma sucessão e que percebi por que razão nunca poderias dar a sucessão u.

A Estás errado. Eu posso dar a minha sucessão u, não continuando da forma como comecei, mas de uma outra.

B Não sei como!...

A É fácil. Escrevo:

$$2(=u_1), 10(=u_2), \ldots, 325(=u_{20})$$

como nas duas listas precedentes, e depois escrevo:

$$u_n = 1$$

para todo o número natural n maior do que 20.

B Se era isso que querias, porque não escreveste

$$u_{21} = 1, u_{22} = 1, \text{etc. ?}$$

A Porque "etc." não é um termo matemático, embora possamos usar algo semelhante, desde que tal não cause confusão no leitor. Por exemplo, se eu escrever

$$2, 1, 4, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$$

que sucessão te estou a dar?

B É a sucessão cujo primeiro termo é 2, o segundo termo é 1, o terceiro termo é 4, e a partir da ordem 3, todos os termos são 2.

A Como escreverias isso numa linguagem matemática?

B Se chamar w a esta nova sucessão, escrevo:

$$\begin{aligned} w_1 &= 2 \\ w_2 &= 1 \\ w_3 &= 4 \\ \forall_{n>3} \quad w_n &= 2 \end{aligned}$$

A Acho que está na altura de introduzirmos a definição de sucessão, ou terás ainda alguma pergunta a fazer-me?

B Uma só e diz respeito à primeira sucessão, aquela a que chamaste u. Como é que eu poderia saber que, a partir da ordem 20, todos os termos eram 1?

A É evidente que não o podias saber, porque eu, naquela altura, nunca te disse qual era a sucessão u. Depois da ordem 20, eu poderia ter escolhido os termos todos iguais a 2, ou iguais a 5, ou iguais a um qualquer número real que eu escolhesse. Também poderia ter escolhido

$$\forall_{n>20} \quad u_n = \frac{3}{2^n}$$

ou

$$\forall_{n>20} \quad u_n = \sqrt[n]{2}$$

Mesmo que se dê a sequência dos termos de uma sucessão r até uma ordem qualquer (fixa), isso nada nos diz sobre qual é a sucessão r. A partir do último termo dado (que poderá ter uma ordem superior a um bilião de biliões) eu poderia dizer sempre, tal como no caso da sucessão u, que todos os termos seguintes seriam 1, ou seriam 2, ou que seriam da forma $\sqrt[n]{2}$.

B Então o que é uma sucessão?

A Vais ser tu a dizer-mo.

B Eu?

A Sim, e é fácil. Que termos utilizámos até agora?

B Utilizámos os termos: *sucessão*, *ordem*, e, para cada sucessão, o *termo de ordem* 1, de ordem 2, e, mais geralmente, de ordem n, dessa sucessão.

A Comecemos com as ordens. O que é que elas são?

B São números naturais.

A Então o conjunto das ordens é. . .

B É o conjunto $\mathbb{N}$.

A E os termos, o que são?

B Para cada ordem, o termo com essa ordem é um número qualquer.

A Qualquer?

B Sim, um qualquer número real.

A O conjunto dos quais designas por $\mathbb{R}$, não é verdade?

B Sim, embora esse conjunto dependa da sucessão em questão, o que não acontecia com o conjunto das ordens. Por exemplo, para a sucessão v, o conjunto dos termos é o conjunto dos números reais da forma $\frac{1}{n}$, enquanto para a sucessão u original o conjunto dos termos é:

$$\{u_1, \ldots, u_{20}, 1\}$$

A Excelente resposta. Fazendo o ponto da situação, temos *o conjunto das ordens que é* $\mathbb{N}$ *e o conjunto dos termos que é, para cada sucessão, um subconjunto de* $\mathbb{R}$.

Tens horror às letras gregas?

B Não.

A Então pensa numa sucessão α qualquer. Sabes o que é o conjunto das ordens e o conjunto dos termos desta sucessão. O que será a sucessão α?

B Bem... comecemos no princípio... tenho a ordem 1 e o termo α_1, depois a ordem 2 e o termo α_2 e assim sucessivamente — a uma ordem n eu associo-lhe o termo α_n... O que será α?

A Já o sabes. Não disseste que a uma qualquer ordem n associavas o número real α_n?

B Sim... então *a sucessão* α *é essa associação, ou essa correspondência que a cada número natural associa, ou faz corresponder, o número real* α_n. Espera um pouco... já sei! A sucessão α é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

A Podemos então dar a seguinte definição:

uma sucessão de termos reais é uma aplicação de $\mathbb{N}$ *em* $\mathbb{R}$.

Dada uma qualquer sucessão α de termos reais, sendo ela uma aplicação, diz-me qual é o seu domínio e o seu contradomínio!

B O domínio é $\mathbb{N}$ (que é o conjunto das ordens) e o contradomínio (que é o conjunto dos termos) é um subconjunto de $\mathbb{R}$, que depende da sucessão em questão.

Só há uma coisa que me faz confusão!...

A Diz.

B Se α é uma função e 3 é um elemento do domínio de α, por que designamos por α_3 e não por $\alpha(3)$ o valor que α associa a 3? Mais geralmente, por que escrevo α_n em vez de $\alpha(n)$?

A Tens toda a razão! e a resposta é tão simples como isto: toda a gente escreve α_n em vez de $\alpha(n)$. Não se trata de uma questão matemática — começou-se a escrever assim e o hábito fez o resto.

B Não seria bom fazer aqui uma pausa?

A Também acho, mas isso vai depender da resposta que me deres à seguinte pergunta: eu não consegui dar-te, inicialmente, a sucessão u porque não me era possível escrever explicitamente a sequência dos seus termos... não é isto verdade?

B Sim.

A Então o conjunto dos seus termos tem de ser infinito?

B A resposta é não! O conjunto dos termos da sucessão u é:

$$\{u_1, \ldots, u_{20}, 1\}$$

que é finito. Mas também pode acontecer que o conjunto dos termos de uma sucessão seja infinito — basta ver o que se passa com a sucessão v para a qual o conjunto dos termos é o conjunto (infinito) formado por todos os reais da forma $\frac{1}{n}$.

Ainda respondendo à tua pergunta, até pode acontecer que o conjunto dos termos de uma sucessão seja unitário. Por exemplo a sucessão

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

ou, se quiseres, de uma forma matematicamente correcta, a sucessão (chamemos-lhe β) dada por

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \beta_n = 1$$

A Então o que é necessariamente infinito numa sucessão?

B É o seu domínio ou, por outras palavras, o conjunto das ordens que é $\mathbb{N}$.

A Muito bem. Acho que merecemos uma boa pausa.

A Vamos recomeçar?

B Posso por-te uma dúvida?

A Claro.

B Pareceu-me, da conversa anterior, que para dar uma sucessão preciso de uma fórmula que me dê todos os termos a partir de uma certa ordem. Por exemplo, a sucessão v era dada pela fórmula

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_n = \frac{1}{n}.$$

Aqui a fórmula dava a sucessão de uma forma completa. Com a sucessão original u começávamos por dar os termos u_1 a u_{20} e depois lá vinha a fórmula

$$\forall_{n>20} \quad u_n = 1.$$

Já que não podemos escrever explicitamente a sequência de todos os termos de uma sucessão, não estou a ver outro processo de dar uma sucessão. É isto verdade?

A É uma pergunta bem difícil de responder, porque depende do que se entende por fórmula.

Esquecendo os primeiros termos da sucessão, diz-me quais são os tipos de fórmula em que estás a pensar?

B Sei lá...

$$a_n = \frac{2}{n}, \quad b_n = \frac{2^n}{5}, \quad c_n = \sqrt[n]{5}, \quad d_n = \frac{n}{n+1}, \quad e_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}, \ldots$$

já chega?!

A Sim. Não te vou responder à pergunta porque uma definição da palavra fórmula nos levaria muito longe. Mas vou apresentar-te outros exemplos de sucessões que são dadas por "fórmulas" que, provavelmente, não te ocorreriam.

B Estou com curiosidade...

A Pensa na sucessão u dada por

$$u_1 = 1$$
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad u_{n+1} = u_n + n$$

B Vejamos: o primeiro termo u_1 é 1; o segundo termo u_2 pode obter-se da fórmula

$$u_{n+1} = u_n + n$$

fazendo $n = 1$, tendo-se assim $u_2 = u_1 + 1 = 2$; procedendo de forma análoga para o terceiro termo, temos $u_3 = u_2 + 2 = 4$. Assim, à excepção do primeiro termo que já sabemos ser 1, e olhando com atenção para a fórmula que dá u_{n+1}, vemos que qualquer termo obtém-se adicionando o termo anterior com a ordem desse termo.

A Escreve os primeiros dez termos desta sucessão.

B

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46$$

É interessante, porque não sendo constante a diferença entre dois termos consecutivos, tal diferença é acrescentada de uma unidade sempre que passamos de uma diferença à seguinte...

A Explica-te melhor.

B

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 2 - 1 = 1 \\ u_3 - u_2 &= 4 - 2 = 2 \\ u_4 - u_3 &= 7 - 4 = 3 \\ &\vdots \\ u_{n+1} - u_n &= n \end{aligned}$$

Afinal o que eu disse resulta imediatamente de $u_{n+1} = u_n + n$, mas isso dá-me uma ideia que é a seguinte:

$$\begin{aligned} &u_1 = 1 \\ &u_2 = u_1 + (u_2 - u_1) = u_1 + 1 \\ &u_3 = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) = u_1 + 1 + 2 \\ &u_4 = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) = u_1 + 1 + 2 + 3 \end{aligned}$$

o que me sugere que

$$u_n = u_1 + 1 + \cdots + (n-1)$$

para $n > 1$. Ora como, para $n > 1$, $1 + \cdots + (n-1)$ é a soma dos $n-1$ primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 1, obtemos

$$1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

para $n > 1$. Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ \forall_{n>1} \quad u_n &= 1 + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

Isto mostra que esta sucessão, que me apresentaste de uma forma requintada, pode ser dada por uma fórmula que até é bem simples.

A Foi um bom trabalho que fizeste, mas pensa agora na sucessão v dada por

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \\ v_2 &= 2 \\ \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_{n+2} &= v_{n+1} + v_n \end{aligned}$$

B Já me estou a habituar. Aqui o primeiro termo é 1, o segundo é 2 e o terceiro obtém-se da fórmula $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, fazendo $n = 1$ — o que dá $v_3 = v_2 + v_1 = 5$.

Olhando com atenção para a fórmula $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ vemos que, para qualquer ordem maior do que 2, o termo com essa ordem é a soma dos dois termos anteriores.

A Diz-me os primeiros dez termos.

B 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.

A Encontras, para esta sucessão, alguma fórmula do tipo da que deste para a sucessão anterior?

B Deixa-me pensar um pouco... não estou a vislumbrar nenhum processo de obter uma tal fórmula... o que não quer dizer que não consiga... ou que, mesmo que não consiga, ela não exista...

Responde-me: existe uma tal fórmula?

A Existe!, mas é mais difícil de obter do que aquela que me deste para a sucessão u. As fórmulas (todas equivalentes, evidentemente) para esta sucessão, conhecida por sucessão de Fibonacci, fazem intervir, de forma explícita ou implícita, o chamado número de ouro, o que nos poderia levar a uma longa discussão. Vamos, por isso, deixar tal assunto para um exercício.

Mas quero perguntar-te: incomoda-te que uma sucessão possa ser dada desta forma?

B Agora que mo perguntas até tenho uma objecção que penso ser importante.

A E qual é?

B Para obter um u_n tenho de somar os dois termos imediatamente anteriores. Assim, se a ordem for suficientemente grande, as duas ordens anteriores também o serão e portanto uma escolha conveniente da ordem pode ser tal que, mesmo que vivas duzentos anos, nunca a chegues a atingir. Ficamos assim com a mesma dificuldade que tínhamos com a definição da sucessão *u original*.

A Estás enganado. Como já te disse nunca te poderia ter dado a sucessão u pelo processo que procedi no início. Repara que, mesmo que começasse a escrever 1 a partir do termo de ordem 20 e assim continuasse, nada te poderia garantir que em alguma ordem os meus seguidores não escrevessem 2 e depois continuassem com 1 ou com qualquer outra coisa que fizesse sentido.

Aqui a sucessão está dada! Sabemos que, para cada n, *existe um e um só* u_n. É certo que poderemos ter dificuldade em o calcular, mas sabemos que *existe e que é único*.

B Estás a dizer que uma coisa é eu saber que algo existe e é único e outra é saber se o consigo calcular?!

A É isso.

B Compreendo.

A Para terminar esta conversa, que já vai longa, quero dar-te só mais um exemplo. Sabes o que é um número primo?

B Um número primo é um natural maior do que 1, que só é divisível por ele próprio e por 1.

A Designemos por $\mathcal{P}$ o conjunto dos números primos. É o conjunto $\mathcal{P}$ finito ou infinito?

B $\mathcal{P}$ é um conjunto infinito.

A Então, tal como falamos na sucessão dos números naturais, podemos falar na sucessão dos números primos, que vamos designar por γ. Como descreverias a sucessão γ?

B γ é a aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathcal{P}$ dada por

$$\begin{array}{ll} 1 \mapsto 2 & \text{à ordem 1 associo o número 2} \\ 2 \mapsto 3 & \text{à ordem 2 associo o número 3} \\ 3 \mapsto 5 & \text{à ordem 3 associo o número 5} \\ 4 \mapsto 7 & \text{à ordem 4 associo o número 7} \\ 5 \mapsto 11 & \text{à ordem 5 associo o número 11} \end{array}$$

e depois a cada ordem seguinte associava o número primo seguinte.

A Como sabes que, para cada ordem, há sempre um número primo seguinte?

B Porque $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{P}$ é infinito.

A Não te bastava dizer que $\mathcal{P}$ era infinito?

B Não! Supõe que em vez de $\mathcal{P}$ me tinhas dado o conjunto $[2, +\infty[$, que é um conjunto infinito. Ora, para este conjunto, não existe o número que se segue ao número 2.

A Muito bem. Temos então $\gamma_1 = 2$, γ_2 será...

B O número primo seguinte.

A E o que é o número primo seguinte?

B É o menor número primo superior a dois.

A Que relação tem $\mathcal{P} \setminus \{2\}$ com γ_2?

B Bem, $\mathcal{P} \setminus \{2\}$ é o conjunto de todos os números primos diferentes de 2, ou, o que é equivalente, superiores a 2. Assim γ_2 será o menor elemento deste conjunto.

A Como escreves isso em termos matemáticos?

B $\gamma_2 = \min(\mathcal{P} \setminus \{2\})$.

A Supõe que já conhecias $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$. Como definirias γ_{p+1}?

B γ_{p+1} é o menor dos números primos que são maiores do que γ_p... espera... já estou a ver onde queres chegar — se a $\mathcal{P}$ tirarmos os números $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, então γ_{p+1} é o menor elemento deste novo conjunto.

A Formaliza o que me disseste.

B Curioso, a sucessão dos números primos pode ser dada de uma maneira semelhante àquela que foi usada nas duas sucessões anteriores. Basta escrever

$$\begin{aligned} & \gamma_1 = 2 \\ \forall_{p \in \mathbb{N}} \quad & \gamma_{p+1} = \min\Big(\mathcal{P} \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}\Big) \end{aligned}$$

A Há de facto alguma semelhança, *mas existe uma diferença fundamental*. Enquanto nas duas sucessões anteriores cada termo era calculado a partir dos anteriores, aqui ele é o menor dos posteriores, que não sabemos quais são.

B Tens razão, mas o que eu gostava de ter era ainda mais — queria ter uma fórmula para a sucessão γ.

A Falas de fórmulas do tipo das que me deste no início da nossa conversa? Por outras palavras, pretendias uma fórmula para γ_n que envolvesse apenas n e onde não figurasse qualquer termo com ordem inferior a n?

B Sim.

A Desilude-te então! Não se conhece nenhuma e já passaram mais de vinte e cinco séculos desde que temos conhecimento da existência de uma primeira ideia de número primo.

B E fórmulas semelhantes às das duas sucessões anteriores?

A Também não.

B E, no entanto, podemos falar da sucessão dos números primos!

A Para terminar, duas perguntas. Primeira: onde, na tua definição de γ, entra o conhecimento de que $\mathcal{P}$ é infinito?

B Deixa-me ver... se $\mathcal{P}$ fosse finito então... então para algum p, $\mathcal{P} \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ seria vazio, e portanto não haveria mínimo.

A Já sabes que $\mathcal{P} \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ é um conjunto não vazio. Basta-te isso para garantir que ele tem mínimo?

B Claro que não! O conjunto $]2, +\infty[$ é não vazio e não tem mínimo. Mas $\mathcal{P} \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ é um subconjunto de $\mathbb{N}$ e eu estou a admitir que *todo o subconjunto não vazio de* $\mathbb{N}$ *tem mínimo*.

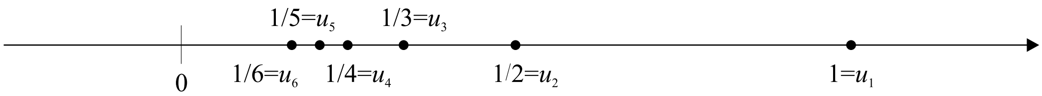
A Fiquei satisfeito com esta nossa discussão e poderíamos continuá-la, sem alterar o assunto, em várias direcções. Mas, por hoje, já chega. Vamos tomar alguma coisa?

Noção de limite de uma sucessão

A Considera a sucessão u dada por

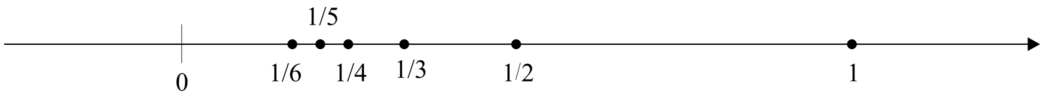
$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad u_n = \frac{1}{n}.$$

Vou representar os primeiros seis termos desta sucessão na recta real.



B Estás a tentar fazer o gráfico de u?

A Não! Como sabes o gráfico de u é um subconjunto do plano, e eu estou a utilizar apenas a recta real. O que pretendo é, tão só, marcar os sucessivos termos de u tendo o cuidado de, quando marco o ponto u_1, indicar que esse ponto corresponde ao primeiro termo da sucessão e não a qualquer outro, e assim sucessivamente. Repara que se eu apenas tivesse representado os pontos



não saberia qual dos pontos marcados era a imagem geométrica de u_1 — tanto poderia ser o 1/6 como o 1/3 ou como qualquer outro que marquei — e eu quero que a imagem geométrica dos primeiros seis termos da sucessão me diga, por si própria, qual o primeiro termo, qual o segundo, ... até ao sexto termo de u.

B Estás a tentar dizer-me que esta é uma outra imagem geométrica da sucessão u, mais simples, porque na recta, do que o gráfico que é no plano?

A Disseste-o melhor do que eu o faria.

Agora, vai imaginando os sucessivos termos da sucessão u a serem marcados na recta real — o que é que achas de notável que esteja a acontecer?

B Eles vão-se aproximando cada vez mais de zero e aproximam-se tanto quanto eu queira desde que considere ordens suficientemente grandes. Contudo não há nenhum termo que seja zero...

A Pensa agora na sucessão v dada por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_n = 0.$$

Estás a ver a sua representação geométrica?

B É simples, é como se, na recta real, eu fosse marcando sempre o ponto correspondente ao zero.

A Então, e utilizando uma frase tua, eles vão-se aproximando de zero e tanto quanto eu queira, desde que considere ordens suficientemente grandes...

B Eles não se aproximam de zero! Eles já são zero!

A Tens razão. Vou, então, modificar a tua frase, suprimindo a palavra "aproximando", e dizer

os termos estão tão próximos de zero quanto eu queira, desde que considere ordens suficientemente grandes.

B Esta nova formulação já abarca as duas sucessões u e v. Com efeito, zero não se vai aproximando de zero, mas está, evidentemente, tão próximo de zero quanto eu queira. Por isso, na sucessão v, é desnecessário dizer que devo tomar ordens suficientemente grandes. Por que insistes em o dizer?

A Porque quero introduzir uma noção matemática que englobe, além de muitas outras, as sucessões u e v — e se em v parte da frase (a que refere ordens suficientemente grandes) pode ser suprimida, já o mesmo não acontece em u.

B E que noção é essa?

A É a noção de limite.

B Dizes que u tem limite zero e que o mesmo acontece com a sucessão v?

A Sim.

B Mesmo que (como em v) o limite tenha sido atingido e até desde o primeiro termo?

A Não faço distinção. Para mim ambas têm limite zero.

B Disseste que esta noção se aplicava também a outras sucessões. Como o fazes?

A Vais ser tu a dizer-mo. Pensa numa qualquer sucessão α, rememora a nossa conversa, e diz-me o que significará para ti a frase "α tem limite zero".

B Diria que tal acontece se *os termos de α estão tão próximos de zero quanto eu queira, desde que considere ordens suficientemente grandes*.

A E, já agora, diz-me o que significaria, para ti, α ter limite a (onde a é um número real).

B Diria que α tem limite a se *os termos de α estão tão próximos de a quanto eu queira, desde que considere ordens suficientemente grandes*.

A Vou agora dar-te quatro sucessões e quero saber, para cada uma delas, se, de acordo com a definição que acabaste de dar, elas têm ou não limite. As sucessões a, b, c e d são definidas por:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \\ \forall_{n\geq 3} \quad a_n = 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad b_n = 1 + (-1)^n \tag{2}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad c_n = (-1)^n \, \frac{1}{n} \tag{3}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad d_n = 1 - \left(\frac{n-10}{9}\right)^2 \tag{4}$$

B Pensemos, em primeiro lugar, na sucessão a. a_1 é zero, a_2 é -1 e a partir da ordem 2 todos os termos são 1. Assim esta sucessão tem limite 1 uma vez que a partir da ordem 2 todos os termos estão tão próximos de 1 quanto eu queira — eles já são 1.

A Estou de acordo.

B Pensemos agora na sucessão b. Tem-se:

$$\begin{array}{l} \text{para } n = 1\,, \quad b_1 = 1 - 1 = 0\,; \\ \text{para } n = 2\,, \quad b_2 = 1 + 1 = 2\,; \\ \text{para } n = 3\,, \quad b_3 = 1 - 1 = 0\,; \\ \text{para } n = 4\,, \quad b_4 = 1 + 1 = 2\,. \end{array}$$

Estou a ver: se eu considerar uma ordem ímpar então o termo correspondente é zero e se considerar uma ordem par o termo correspondente é 2.

A Dizes isso porque calculaste os primeiros quatro termos?

B Não. Olhando para o termo geral b_n, vemos que, quando a ordem é ímpar, se tem $(-1)^n = -1$ e portanto $b_n = 0$, e que quando a ordem é par, se tem $(-1)^n = 1$ sendo, então, $b_n = 2$.

A E quanto ao limite?

B Parece-me que não tem limite. Imaginando-me a marcar na recta real os sucessivos termos da sucessão, vejo-me a indicar primeiro o ponto zero, e depois o ponto 2, e depois o ponto zero, e depois o ponto 2 e assim sucessivamente.

Desta forma, por muito grande que seja a ordem, existem sempre ordens superiores (as ímpares) para as quais o termo correspondente é zero; e existem sempre ordens superiores (as pares) para as quais o termo correspondente é 2.

Daqui deduzo que b não tem limite. Estou certo?

A Sim. Continua.

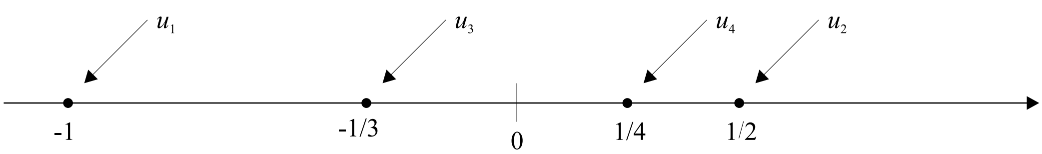
B Analisemos o que se passa com a sucessão c. Tem-se

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & -1 \\ 2 & \mapsto & \dfrac{1}{2} \\ 3 & \mapsto & -\dfrac{1}{3} \\ 4 & \mapsto & \dfrac{1}{4} \\ 5 & \mapsto & -\dfrac{1}{5} \end{array}$$

Imaginando-me a marcar na recta real os termos desta sucessão, vejo-me a indicar primeiro o ponto (correspondente ao número) -1, depois $\frac{1}{2}$, depois $-\frac{1}{3}$, depois $\frac{1}{4}$... posso fazer uma representação geométrica?

A Claro.

B



A O que é que significam as setas?

B Quero com elas dizer que u_1 é igual a -1, u_2 igual a $\dfrac{1}{2}$ e assim sucessivamente.

A Terá esta sucessão limite?

B Penso que tem limite zero, porque vejo os sucessivos pontos aproximando-se do ponto zero, à medida que as ordens crescem — se as ordens crescem e são pares então os pontos correspondentes aproximam-se de zero pela semi-recta positiva; se as ordens crescem e são ímpares os pontos correspondentes aproximam-se de zero pela semi-recta negativa.

Estou certo?

A Estás!... Mas, diz-me, foi assim tão importante para ti a visualização geométrica do comportamento da sucessão?

B Pareceu-me indispensável.

A Não conseguirias chegar à mesma conclusão pensando apenas na expressão $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad c_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$?

B Agora que o perguntas, acho que poderia ter chegado à mesma conclusão. À medida que o n cresce, $\frac{1}{n}$ aproxima-se de zero, e o factor multiplicativo $(-1)^n$ só nos diz se a aproximação é por números positivos ou se é por números negativos.

A Pensa em todos os exemplos anteriores e diz-me se não terias chegado à mesma conclusão mesmo sem interpretação geométrica.

B Deixa-me ver...

É verdade. Em todas essas sucessões o limite (quando existe) poderia ter sido obtido somente por considerações analíticas. Mas a interpretação geométrica é de tal forma esclarecedora e tão intuitiva que recuso separar-me dela.

A Tens toda a razão! Só que, às vezes, a interpretação geométrica não é tão simples e algumas (muitas) sucessões têm de ser estudadas de outra forma.

Vamos agora à sucessão d.

B Esta parece-me mais difícil. Para $n = 1$, o termo correspondente, d_1, é zero, mas para $n = 2$ já tenho que fazer algumas contas. Importas-te que utilize a calculadora?

A Estás à vontade.

B Ora vejamos:

$$\begin{aligned}
&\text{para } n = 2, \text{ tem-se } d_2 = 1 - \frac{64}{81} \approx 0,2098765432\\
&\text{para } n = 3, \text{ tem-se } d_3 = 1 - \frac{49}{81} \approx 0,3950617284\\
&\text{para } n = 4, \text{ tem-se } d_4 = 1 - \frac{36}{81} \approx 0,5555555556\\
&\text{para } n = 5, \text{ tem-se } d_5 = 1 - \frac{25}{81} \approx 0,6913580247
\end{aligned}$$

Ainda tenho alguma dúvida. Posso continuar?

A Continua.

B

$$\begin{aligned}
&\text{para } n = 6, \text{ tem-se } d_6 = 1 - \frac{16}{81} \approx 0,8024691358\\
&\text{para } n = 7, \text{ tem-se } d_7 = 1 - \frac{9}{81} \approx 0,8888888889\\
&\text{para } n = 8, \text{ tem-se } d_8 = 1 - \frac{4}{81} \approx 0,950617284
\end{aligned}$$

Agora já chega. A sucessão tem limite 1.

A Calcula d_9, d_{19} e d_{30}.

B Ora

$$d_9 = 1 - \left(\frac{9-10}{9}\right)^2 = 1 - \frac{1}{81} \approx 0,987654321$$

e está bem mais perto de 1, como eu esperava. Vejamos agora o termo de ordem 19. Tem-se... não pode ser!... tem-se $d_{19} = 0$. Deixa-me ver

$$d_{19} = 1 - \left(\frac{19-10}{9}\right)^2 = 1 - \left(\frac{9}{9}\right)^2 = 0$$

É verdade! Como é que isto pode acontecer com uma sucessão de aparência tão inocente?!

E o d_{30}?... é só pôr aqui na calculadora e dá... dá...

$$d_{30} = 1 - \left(\frac{30-10}{9}\right)^2 = 1 - \frac{400}{81} \approx -3,938271605$$

Espantoso!

A Por que razão pensas que isto aconteceu?

B Só vejo uma resposta: calculei poucos termos da minha sucessão. Se eu tivesse calculado 50 ou 100 (para ter a certeza 500) isto não poderia acontecer com uma sucessão normal.

A Achas normal a sucessão e dada por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad e_n = 1 - \left(\frac{n - 10^3}{10^3 - 1}\right)^2$$

B Claro.

A Então calcula os primeiros 500 termos da sucessão (para não ser perverso, peço-te que os calcules apenas de 10 em 10) e calcula depois o e_{600}, e_{700}, e_{800} e e_{900}.

A Já acabaste?

B Sim!, mas que trabalhão!

A E a conclusão é...

B Os termos estão-se a aproximar de 1 e até já estão bem perto.

A Dizes então que esta sucessão tem limite 1?

B Tudo o parece indicar, mas depois do exemplo anterior já não tenho uma certeza absoluta. Contudo, calculei o termo com a ordem 900... e muitos outros com ordens inferiores... e todos eles sugerem-me que o limite é 1.

A Só te peço agora que calcules os termos com as ordens 1999 e 3000.

B Depois do que já fiz e sendo só mais dois, não te levo a mal. Ora d_{1999} é igual a... a zero! E d_{3000} é igual a $-3,008012016$! Era o que eu temia. Enganaste-me outra vez!

A Não fui eu que te enganei, foste tu que te enganaste a ti próprio.

B Como assim?!

A Defini a sucessão e por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad e_n = 1 - \left(\frac{n-10^3}{999}\right)^2.$$

Pensemos agora na sucessão (porque é uma sucessão!)

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \frac{n-10^3}{999}$$

e diz-me, quando n cresce de 1 até 999, o que é que acontece?

B Para mim é mais fácil pensar na sucessão de termo geral

$$\frac{10^3-n}{999}$$

o que, para o caso, é indiferente uma vez que vamos depois tomar o seu quadrado. Ora aqui é muito claro que, quando n cresce de 1 até 999, o numerador decresce de 999 a 1, e, portanto, a fracção vai decrescendo de 1 a $\frac{1}{999}$.

A O que acontece ao quadrado "da fracção"?

B Vai decrescendo de 1 a $\left(\frac{1}{999}\right)^2$.

A Então o que é que acontece aos termos da nossa sucessão e, quando n cresce de 1 a 999?

B Como

$$e_n = 1 - \left(\frac{10^3-n}{999}\right)^2$$

os seus termos vão crescendo de 0 até $1-\left(\frac{1}{999}\right)^2$, que é bem próximo de 1.

A Quando $n = 1000$, qual o valor de e_n?

B $e_{1000} = 1$.

A E depois o que é que acontece quando n cresce a partir de 10^3?

B Vou voltar à fracção
$$\frac{n-10^3}{999}$$
à medida que o n cresce, e pode crescer tanto quanto eu queira, $\frac{n-10^3}{999}$ vai-se tornando tão grande quanto eu queira, o mesmo acontecendo ao seu quadrado. Assim
$$-\frac{n-10^3}{999}$$
vai-se tornando tão negativo quanto eu queira, passando-se o mesmo, obviamente, com
$$1-\frac{n-10^3}{999}.$$

A Foi uma boa discussão a que fizeste, e concluíste que, por menor que seja um número real (ou, na tua linguagem, por mais negativo que ele seja), eu encontro sempre um termo da sucessão e que, não só é menor do que ele, como também o são todos os seguintes (ou seja, todos os que têm ordens superiores).

B Isso é certamente verdadeiro.

A Poderá, então, a sucessão e ter limite?

B É claro que não.

A Quantos termos de uma sucessão precisas então de calcular para que tenhas a certeza de que essa sucessão tem limite?

B Pressinto uma certa ironia na tua pergunta, e por isso vou ser cuidadoso.

Olhemos com atenção para as sucessões d e e, de termos gerais
$$d_n = 1-\left(\frac{n-10}{9}\right)^2, \qquad e_n = 1-\left(\frac{n-10^3}{10^3-1}\right)^2.$$

Isto leva-me a pensar na sucessão r dada por
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad r_n = 1-\left(\frac{n-10^6}{10^6-1}\right)^2.$$

Ora, uma aplicação trivial dos argumentos que utilizei para a sucessão e, me levaria às conclusões seguintes:

(1) quando n cresce de 1 até um milhão (10^6), r_n cresce de 0 até 1;

(2) quando n cresce a partir de um milhão, e tanto quanto eu queira, r_n decresce de tal forma que se pode tornar tão negativa quanto eu queira.

Conclui-se daqui que, do conhecimento de um milhão de termos de uma sucessão, nada se pode concluir quanto à existência de limite. E quem diz um milhão, diz um bilião . . .

A O que concluis daí?

B Que *o conhecimento do valor dos primeiros termos de uma sucessão, mesmo que sejam muitos, (mas com um conjunto de ordens finito), nada nos diz sobre a existência de limite da sucessão, e, no caso de existência, do seu possível valor*.

A Concluíste muito bem! — até melhor do que eu esperava porque ainda juntaste a frase: e, no caso de existência, do seu possível valor. Como chegaste a esta conclusão?

B Basta pensar na sucessão s dada por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad s_n = \begin{cases} r_n, & \text{se } 1 \leq n \leq 10^6, \\ 0, & \text{se } n > 10^6. \end{cases}$$

que tem limite zero, mas que, sendo igual a r para o primeiro milhão de termos, nos enganaria tanto como essa sucessão.

A Excelente exemplo.

B Mas, diz-me então, para que serve a calculadora?

A Para nada!

B Para nada?

A Com certeza, se eu compreendi bem a tua pergunta. Perguntavas-me se a calculadora seria útil para saber se uma sucessão tinha limite e, no caso de o ter, para o calcular.

B Era essa a pergunta.

A E a resposta é: não! Não serve para isso e muito menos para motivar a noção de limite. De uma forma imprecisa, podemos dizer que o limite é "uma passagem ao infinito", e nada há de mais finito do que uma calculadora.

B Então ela não serve para nada?

A Não foi isso que eu disse. Em situações que compreenderás mais tarde, ela é, entre outras coisas, um auxiliar inestimável no cálculo de *valores aproximados* do limite.

B Ainda me ocorre outra pergunta.

A Diz.

B Por que razão aceitaste todas as respostas que te dei sobre as sucessões u, v, a, b, c e só questionaste as relativas às sucessões d e e?

A A resposta é simples: todas as tuas anteriores respostas estavam correctas.

B Mudei assim tanto o estilo de respostas?

A Foi isso! Se rememorares as respostas que me deste sobre as sucessões u, v, a, b, c verás que em todas elas tinhas em consideração o comportamento de todos os termos dessas sucessões, enquanto que nas sucessões d e e só te preocupaste com os primeiros termos.

B Deves ter razão... vou pensar nisso... mas agora uma pausa!

A Nunca é demais repetir o que é importante. Dada uma sucessão u de termos reais e um número real a, quando é que dizes que u tem limite a?

B Digo que u tem limite a se u_n *está tão próximo de* a *quanto eu queira, desde que considere ordens suficientemente grandes*.

A O que é que significa para ti a frase "u_n está tão próximo de a quanto eu queira"?

B Dita assim ela perde o significado que lhe dei, porque um número real u_n está tão próximo de a quanto eu queira se, e só se, for a. Mas repara que a frase que me deste

"u_n está tão próximo de a quanto eu queira" não termina, no meu discurso, com um ponto final, mas com uma vírgula à qual se segue um "desde que" — é que o grau de proximidade entre u_n e a depende da grandeza das ordens.

A Foi uma boa resposta e vamos explorá-la. O que queres dizer com "graus de proximidade"?

B Se eu marcar um u_n (digamos u_7) na recta real e se também marcar um número real (digamos 2), o grau de proximidade entre estes dois números é medido pela distância entre 2 e u_7, e o grau de proximidade é tanto maior quanto menor for a distância.

A Dados dois números reais x e y, como calculas a distância entre eles?

B A distância entre x e y é dada por $|x - y|$.

A Então a distância entre u_7 e 2 é dada por...

B Por $|u_7 - 2|$.

A Vou designar por $d(x, y)$ a distância entre os números reais x e y. Assim

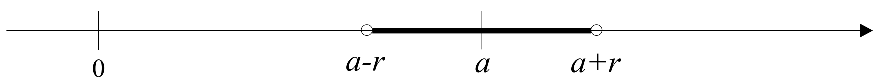
$$d(x, y) = |x - y|$$

Considera agora, para um dado número real positivo r, o seguinte conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}; \quad d(x, a) < r\}$$

Geometricamente, como o interpretas?

B Trata-se do conjunto dos números reais que estão a uma distância de a inferior a r. Se o a for positivo e o r pequeno, a interpretação na recta real desse conjunto é



Posso até dizer que esse conjunto é o intervalo $]a - r, a + r[$.

A Vou dar um nome ao conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}; \quad d(x, a) < r\}$$

Vou chamar-lhe a *vizinhança de a de raio r* (ou a *vizinhança r de a*) e designo-a por

$$V_r(a)$$

Como traduzirias a frase "u_n está muito próximo de a", utilizando a noção de vizinhança?

B Se o r for pequeno a vizinhança $V_r(a)$ é um intervalo $]a-r, a+r[$ cujas extremidades $a-r$ e $a+r$ estão muito próximas de a e, portanto, por maioria de razão, todos os elementos da vizinhança estão muito próximo de a. Assim, se o r for suficientemente pequeno, dizer que "u_n está muito próximo de a" é equivalente a dizer que $u_n \in V_r(a)$.

A Voltemos de novo à definição de limite. Como traduzirias a frase

"u_n está tão próximo de a quanto eu queira, desde que... "

B Poderia dizer:

para todo o r pequeno, $u_n \in V_r(a)$, desde que considere ordens suficientemente grandes.

A E se os r fossem grandes?

B Com esses não tenho eu problemas.

A Nesse caso é dispensável dizer que r é pequeno. Basta dizer:

"para todo o real positivo r, $u_n \in V_r(a)$, desde que ... "

B De acordo.

A E como escreves simbolicamente "para todo o real positivo r"?

B Escrevo $\forall_{r\in\mathbb{R}^+}$.

A Vou agora fazer algo com o qual não estou geralmente de acordo e que consiste em dar uma definição parte em termos matemáticos e outra parte em linguagem corrente. Mas, como estamos a meio de uma conversa, vou utilizar essa linguagem *híbrida* que será *transitória*. Assim, digo que a sucessão u tem limite a se

$\forall_{r\in\mathbb{R}^+}\ u_n \in V_r(a),$ desde que considere ordens suficientemente grandes.

Vejamos um exemplo. Considera a sucessão v dada por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

Terá ela limite?

B Claro. Tanto geometricamente como analiticamente se vê sem dificuldade que v tem limite zero.

A Sejamos agora mais precisos e utilizemos a definição (híbrida e transitória) que há pouco te dei. Deverás então provar que, *para cada* $r \in \mathbb{R}^+$ que eu te dê, se tem $u_n \in V_r(0)$ desde que as ordens sejam suficientemente grandes.

O que queres dizer com "as ordens suficientemente grandes"?

B Quero dizer que a partir de uma certa ordem (que pode ser muito grande) todos os u_n estão na $V_r(0)$.

A Supõe que te dou $r = 1/10$. Se queres provar, segundo a definição referida, que v tem limite zero, o que deves fazer?

B Devo encontrar uma ordem, chamemos-lhe p, tal que para todas as ordens n superiores a p, se tem $v_n \in V_{1/10}(0)$.

A Como expressas isso em linguagem matemática?

B Devo encontrar uma ordem p tal que, se $n > p$, então

$$v_n \in V_{\frac{1}{10}}(0)$$

mas posso escrever $v_n \in V_{1/10}(0)$ das seguintes formas equivalentes

$$d(v_n, 0) < \frac{1}{10},$$
$$|v_n - 0| < \frac{1}{10}.$$

A Se deves encontrar uma ordem p, encontra-a!

B Deixa-me ver... quero que

$$|v_n - 0| < \frac{1}{10}$$

ou, equivalentemente,

$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \frac{1}{10}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$$

ou, equivalentemente,

$$n + 1 > 10$$

ou, ainda,

$$n > 9$$

Assim, se tomar $p = 9$, tem-se, para $n > p$, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{10}$. Encontrei portanto o que pedias: $p = 9$.

A E se r fosse $\dfrac{1}{100}$?

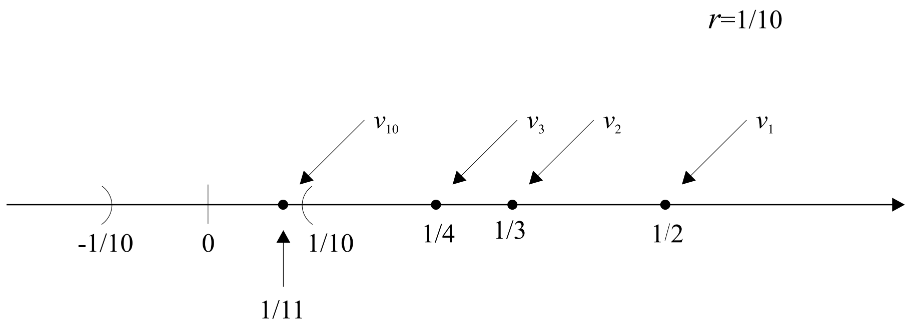
B Eu podia garantir que $v_n \in V_{1/100}(0)$, se n fosse maior que 99. Portanto a ordem p, para este r, é 99.

A Estou de acordo que a ordem 99 serve, mas não concordo contigo quando dizes que *a* ordem p é 99.

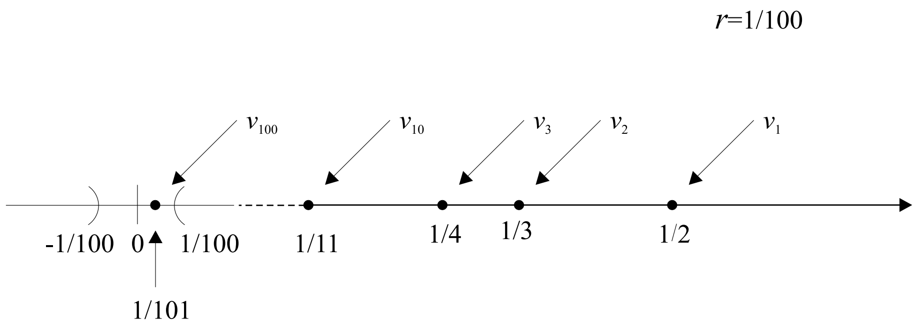
B Tens razão. Foi uma falha de linguagem. Com efeito, se a ordem 99 serve, então também serve a ordem 100, ou a ordem 101, ou qualquer outra ordem superior a 99.

A Repara que, quando te dei para r o valor 1/10, encontraste uma ordem p que era 9 e que, quando escolhi para r o número 1/100, a ordem que encontraste foi 99. Achas isso natural?

B Sim. Vejo-o muito bem geometricamente, embora a representação seja difícil uma vez que 1/10 e 1/100 são números muito pequenos quando comparados com os valores que têm os primeiros termos da sucessão v. Por isso vou fazer desenhos com uma escala não fixa É para



mim claro que, à medida que considero valores de r mais pequenos, maiores têm de ser as ordens p a partir das quais todos os termos da sucessão estão na vizinhança correspondente.



A Será possível escolher uma ordem que sirva para todos os r?

B Com esta sucessão, não! Conseguir encontrar uma ordem p que seja independente das vizinhanças, só para sucessões de tipo muito particular. Olha! as sucessões constantes — para essas a ordem p até pode ser qualquer. E também... deixa-me ver... se considerar, por exemplo, a sucessão w definida por

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 3$$
$$\forall_{n>5} \quad w_n = 1$$

que tem limite 1... para esta também há uma ordem (a ordem 5 ou qualquer outra maior) a partir da qual todos os termos estão na $V_r(1)$, qualquer que seja o r que me dês.

A Mas, em geral, a ordem p depende do r?

B Sim, para cada r, devo encontrar uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão estejam na vizinhança de raio r do limite.

A Recorda agora a definição (híbrida e transitória) que te dei da noção de limite de uma sucessão. Devo escrever

$$\exists_{p\in\mathbb{N}} \forall_{r\in\mathbb{R}^+} \dots$$

ou escrever

$$\forall_{r\in\mathbb{R}^+} \exists_{p\in\mathbb{N}} \dots$$

B Na primeira forma estás a dizer que existe uma ordem que serve para todos os r (ou seja, para todas as vizinhanças), o que é manifestamente falso. Na tua segunda formulação estás a dizer que, para cada vizinhança (ou, o que é o mesmo, para cada r) existe uma ordem p tal que..., o que me parece correcto.

A Então e as sucessões constantes...

B Nesse caso ambas as formulações servem. Mas, se te entendi bem, estamos a tentar encontrar uma versão formalizada da definição por palavras que demos anteriormente da noção de limite, e essa noção aplicava-se a todas as sucessões. Por isso, porque tem de ser aplicável a todas as sucessões, eu tenho que escolher

$$\forall_{r\in\mathbb{R}^+}\exists_{p\in\mathbb{N}}\ldots$$

A Muito bem. Agora só falta substituir os ... por uma expressão matemática. Consegues fazê-lo?

B Vou tentar. Para cada r (ou seja, para cada vizinhança) devo encontrar uma ordem p tal que, a partir dela (o que corresponde às ordens suficientemente grandes), se tenha $u_n \in V_r(a)$. Ainda não está completo, mas deverá ser alguma coisa da forma

$$\forall_{r\in\mathbb{R}^+}\exists_{p\in\mathbb{N}}(?)\quad u_n \in V_r(a)$$

Só me falta formalizar o "a partir dela"...

A Queres dizer: "para todas as ordens maiores do que a ordem p"...

B Não digas mais! O (?) deve ser

$$\forall_{n>p}$$

não é?

A Sim. Diz-me então, com cuidado, a versão formalizada a que chegámos da noção de limite.

B *Dada uma sucessão u de termos reais e um número real a, diz-se que u tem limite a se*

$$\forall_{r\in\mathbb{R}^+}\exists_{p\in\mathbb{N}}\forall_{n>p}\quad u_n \in V_r(a)$$

A Excelente. A definição que acabas de dar é muito melhor do que a dada no princípio da nossa conversa. Com efeito, nesta não há qualquer ambiguidade, enquanto na inicial havia frases como "tão próximo quanto eu queira" e "ordens suficientemente grandes", que poderiam, eventualmente, ter para outros interpretações distintas das que lhes estávamos a dar.

Para terminar quero apenas escrever esta definição de uma outra forma equivalente mas que poderá ser útil em certas questões. Não podes substituir

$$\forall_{n>p} \quad \text{por} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

não é verdade?

B Claro, porque só quero considerar ordens n superiores à ordem p.

A Mas podes, com o mesmo sentido, dizer

para todo o $n \in \mathbb{N}$, se n for maior que p, então . . .

B Sim, mas isso seria um passo atrás, porque estávamos a reintroduzir a linguagem corrente numa formulação que se pretende que seja apenas simbólica.

A Tens razão. Mas não consegues escrever simbolicamente a frase que eu te disse?

B Espera. . . para todo o $n \in \mathbb{N}$ escreve-se $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ e depois tenho algo da forma

se . . . então . . .

que é uma implicação. Posso, então, substituir o que escrevi por

$$\forall_{r\in\mathbb{R}^+}\exists_{p\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad n > p \Rightarrow u_n \in V_r(a).$$

A Já agora $u_n \in V_r(a)$ é equivalente a . . .

B A $|u_n - a| < r$. Posso assim escrever, de forma equivalente,

$$\forall_{r\in\mathbb{R}^+}\exists_{p\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad n > p \Rightarrow |u_n - a| < r$$

A Estou satisfeito e penso que sobre este assunto podemos ficar por aqui. Falta a parte prática, claro, porque fazer exercícios é a melhor maneira de consolidarmos o que se aprendeu.

Subsucessões e sublimites

A Como ainda estamos no princípio da nossa conversa e apenas pretendo motivar-te para a noção de subsucessão, vou escrever, de forma imprecisa, uma sucessão u da maneira seguinte:

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, \ldots, u_n, \ldots$$

Supõe, agora, que elimino alguns termos desta sucessão, por exemplo, os termos com as ordens 1, 3, 4, 6 e 8

$$\cancel{u_1}, u_2, \cancel{u_3}, \cancel{u_4}, u_5, \cancel{u_6}, u_7, \cancel{u_8}, u_9, u_{10}, u_{11}, \ldots$$

O que restou da sucessão u, *escrito na ordem herdada*

$$u_2, u_5, u_7, u_9, u_{10}, u_{11}, \ldots$$

é uma nova sucessão, não é?

B Sim.

A Designa-a por v. Como a definirias?

B É simples:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2 \\ v_2 &= u_5 \\ v_3 &= u_7 \\ \forall_{n \geq 4} \quad v_n &= u_{n+5} \end{aligned}$$

A Tens aqui um primeiro exemplo do que eu chamo uma subsucessão da sucessão u.

Supõe, agora, que, além dos termos com as ordens mencionadas, eu também tinha suprimido todos os termos com ordens superiores a 500 e inferiores a 600. Obtinha uma nova sucessão a que vou chamar w. Define-a!

B De forma imprecisa a sucessão w é a seguinte:

$$u_2, u_5, u_7, u_9, u_{10}, \ldots, u_{500}, u_{600}, u_{601}, u_{602}, \ldots$$

Trata-se, de forma correcta, da sucessão dada por:

$$\begin{aligned} w_1 &= u_2 \\ w_2 &= u_5 \\ w_3 &= u_7 \\ w_n &= u_{n+5} \text{ para } 4 \leq n \leq 495 \\ w_n &= u_{n+104} \text{ para } n \geq 496 \end{aligned}$$

A E se eu agora eliminasse todos os termos com ordens superiores a 700?...

B Isso não podes fazer!

A Não posso fazer?!

B Poder, podes... mas o que te restava já não era uma sucessão. Ficavas com a sequência finita de números reais seguinte:

$$u_2, u_5, u_7, u_9, u_{10}, \ldots, u_{500}, u_{600}, u_{601}, u_{602}, \ldots, u_{700}$$

Ora, uma sequência finita de números reais não pode ser uma sucessão, uma vez que uma sucessão é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

A Penso que, intuitivamente, já entendeste muito do que é uma subsucessão. Eu posso eliminar termos de uma sucessão, posso mesmo eliminar muitos, mas, e isto é *o aspecto fundamental*, *o que resta tem de ser ainda uma sucessão*.

B Foi essa a ideia com que fiquei.

A Será que posso eliminar termos cujo conjunto das ordens seja infinito?

B Deixa-me pensar... considero uma sucessão α e tenho de eliminar termos cujo conjunto das ordens seja infinito... mas, para ficar com uma sucessão, o que resta também deve ter um conjunto de ordens infinito... Desculpa a linguagem, mas isto leva-me a pensar se posso, ou não, "partir um conjunto infinito em duas partes disjuntas e também infinitas". Será que o posso fazer?

Claro que posso! Basta na sucessão α suprimir os termos com ordens ímpares

$$\cancel{\alpha_1}, \alpha_2, \cancel{\alpha_3}, \alpha_4, \cancel{\alpha_5}, \alpha_6, \cancel{\alpha_7}, \alpha_8, \ldots$$

A Como escreverias, de forma correcta, esta nova sucessão?

B Dada a sucessão α, esta nova sucessão, que designo por β (e que penso que chamarás uma subsucessão de α), pode ser definida por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \beta_n = \alpha_{2n}$$

A És capaz de me dar outras subsucessões de α?

B Certamente — o difícil foi começar! Vejamos, agora, como te posso responder...

Primeiro: dada a sucessão α, posso obter uma subsucessão suprimindo os termos de α correspondentes a um conjunto qualquer finito de ordens — posso eliminar termos correspondentes a mil, um bilião, um bilião de biliões de ordens, ou mais ainda desde que o conjunto das ordens seja finito.

Segundo: dada a sucessão α, posso obter uma subsucessão eliminando todos os termos com ordem par, ou com ordem ímpar, ou com ordem múltipla de três, ou de quatro, ou de cinco, ou, ainda, suprimindo os termos cuja ordem seja um número primo.

Terceiro: não posso eliminar termos de forma a que o que me resta seja apenas uma sequência finita de números.

A Podes repetir termos?

B Não estou a perceber a pergunta!...

A Pensa na sucessão dos números naturais

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

A sucessão

$$1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

é, na tua opinião, uma subsucessão da sucessão dos números naturais?

B Claro que não. Qualquer que seja a forma que eu escolha para eliminar números naturais, nunca obtenho

$$1, 1, \ldots$$

A E, se em vez da sucessão dos números naturais, te tivesse dado a sucessão

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3, \ldots$$

achas que

$$1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$$

seria uma subsucessão da inicial?

B Penso que sim — bastava fazer os seguintes cortes

$$1, \cancel{2}, \cancel{3}, 1, 2, \cancel{3}, \cancel{1}, 2, 3, \cancel{1}, 2, 3, \cancel{1}, \cancel{2}, 3, \cancel{1}, \cancel{2}, 3, \cancel{1}, \cancel{2}, 3, \ldots$$

A Mas, aqui, repetiste termos?

B Sim, porque a sucessão inicial mo permitia. Nota que, na sucessão dos números naturais, não há repetição de termos, pelo que o mesmo tem de acontecer em qualquer das suas subsucessões, enquanto que, nesta última sucessão

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3, \ldots$$

o facto de 1, 2 e 3 serem termos que se repetem indefinidamente, me permite determinar subsucessões onde o mesmo acontece.

A Podes trocar a ordem como aparecem os termos?

B Explica-te melhor!

A Considera a sucessão

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

será

$$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \ldots$$

uma subsucessão da sucessão inicial?

B Deixa-me, em primeiro lugar, perceber o que é que esta sucessão tem a ver com a anterior. Inicialmente suprimiste todas as fracções com denominador par

$$1, \cancel{\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}, \cancel{\frac{1}{4}}, \frac{1}{5}, \cancel{\frac{1}{6}}, \frac{1}{7}, \cancel{\frac{1}{8}}, \frac{1}{9}, \cancel{\frac{1}{10}}, \frac{1}{11}, \cancel{\frac{1}{12}}, \frac{1}{13}, \ldots$$

e seguidamente trocaste $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ com $\frac{1}{9}$ e assim sucessivamente. Não foi isso?

A Foi.

B Ora, qualquer que seja o processo de eliminação de termos, eu não posso obter da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$, uma sucessão cujos primeiros termos sejam

$$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$$

desde que, como me disseste logo ao princípio, *eu mantenha a ordem herdada*.

A Acho que estamos na altura de introduzir, de forma precisa, a noção de subsucessão. Pensa, então, numa sucessão u qualquer e designa por v uma sucessão à qual aches por bem chamar uma subsucessão de u. Como a definirias?

B Não penses que te vou responder imediatamente. Comecemos devagar... Comecemos com o primeiro termo da sucessão v. O v_1 pode ser o u_1, se eu não o tivesse eliminado, mas também poderá ser o u_5 ou o u_{100}, se eu tivesse eliminado todos os termos até às ordens correspondentes. Portanto o v_1 tem de ser um u com índice "qualquer coisa"... "qualquer coisa" que seja um número natural. Assim

$$v_1 = u_p$$

com $p \in \mathbb{N}$.

Vejamos agora o v_2. O v_2 tem de ser um u com um índice que tem de ser maior do que p. Vamos chamar a esse índice q. Temos assim

$$v_2 = u_q \qquad \text{com } p < q$$

A O q é um número real qualquer maior do que p?

B Não!, o q, por ser um índice, é um número natural. q é um número natural maior do que p.

Consideremos agora v_3. Ora, v_3 é também um u com um índice e esse índice depende dos termos que entretanto suprimimos. Assim v_3 deverá ser um u_r, onde r é um número natural maior do que q.

A Se continuares dessa maneira daqui a pouco não há letras que cheguem para designares os índices. Repara que: ao índice 1 de v_1, associaste o natural p de u_p; ao índice 2 de v_2, associaste o natural q de u_q; ao índice 3 de v_3, associaste o natural r de u_r — quando chegares ao índice 10^3 de v_{10^3}, que letra de que alfabeto vais tu escolher para designares o u com esse índice "qualquer coisa"?

B Tens razão. Mas deste-me uma pista: ao índice 1 de v_1, associo o índice p de u_p; ao índice 2 de v_2, associo um outro índice, o q de u_q e assim sucessivamente... Estou, então, a estabelecer uma correspondência entre os índices de v (o conjunto dos quais é $\mathbb{N}$) e os índices de u, ou seja, estou a estabelecer uma correspondência que a cada natural n (índice de v) associa um natural que será o índice do termo correspondente da sucessão u.

A Estás, então, a introduzir uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

B Sim, e uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ é aquilo a que chamamos uma *sucessão de termos naturais*. Se designarmos por k uma sucessão de termos naturais, eu posso escrever uma subsucessão v da sucessão u na forma

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_n = u_{k_n}$$

Nota que ao índice 1 de v_1 associei o índice k_1 de u, ao índice 2 de v_2 associei o índice k_2 de u (e não uma nova letra como ingenuamente fiz ao princípio) e assim sucessivamente.

Estás de acordo?

A Entusiasmaste-te (o que não é mau) e, talvez por isso, esqueceste-te de uma coisa fundamental. Dizes que, dada uma sucessão u

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

uma subsucessão de u é algo do tipo

$$u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}, \ldots, u_{k_n}, \ldots$$

onde a sucessão k é uma sucessão qualquer?

B Não! A sucessão k é uma sucessão de termos naturais, uma vez que cada termo de k é um índice de u.

A Basta-te então supor que k seja uma sucessão de números naturais...

B Tens razão! Esqueci-me de algo fundamental! Atendendo a que os termos de uma subsucessão se obtêm da sucessão inicial por eliminação de termos, as ordens k_n da subsucessão u_{k_n}, têm que ir crescendo, ou seja,

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n \cdots$$

A Era o que faltava! Assim:

dada uma sucessão u, diz-se que v é uma subsucessão de u se (e só se) existir uma sucessão k de termos naturais, satisfazendo a

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad k_n < k_{n+1} \tag{5}$$

tal que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_n = u_{k_n}$$

B Disseste o que eu pensava.

A Penso que está na altura de fazermos uma pausa e, por isso, apenas te faço uma única pergunta.

B Qual é?

A Será que uma sucessão é também uma subsucessão dela própria?

B Perguntas-me se, dada a sucessão u

$$u_1, u_2, u_3, \dots u_n, \dots$$

então

$$u_1, u_2, u_3, \dots u_n, \dots$$

é uma subsucessão de u?

A Sim.

B Se eu pensar na noção intuitiva que consiste em obter uma subsucessão por eliminação de termos da sucessão inicial, devo dizer-te que sim — pois que, aqui, eliminei *zero* termos.

A E se pensares na definição formal?

B Devo, então, ver se existe alguma sucessão k de números naturais, satisfazendo à condição (5), e tal que

$$v_n = u_{k_n}$$

Ora a resposta é clara — basta tomar $k_n = n$. Assim uma sucessão é sempre uma subsucessão dela própria.

A Numa conversa anterior falámos da noção de limite de uma sucessão u de termos reais. Demos, então, uma sentido preciso à frase

$$u \text{ tem limite } a$$

onde a é um número real.

B Foi uma muito longa conversa.

A Pois bem, supõe que agora te digo que, dada uma sucessão u e dois números reais a e b, se tem:

$$u \text{ tem limite } a \quad \text{e} \quad u \text{ tem limite } b.$$

B Não devo estar a compreender o que me dizes. Em primeiro lugar, a sucessão u pode não ter limite e, depois, se tiver limite a e limite b, então a tem de ser igual a b.

A Supõe que u tem limite. Porque afirmas que a tem de ser igual a b?

B A razão é simples: se u tem limite a então u_n está tão próximo de a quanto eu queira, desde que considere ordens suficientemente grandes, e o mesmo acontece com b, se também supuser que u tem limite b. Ora se a fosse diferente de b, para ordens suficientemente grandes, todos os u_n deveriam estar tão próximos de a e de b quanto eu quisesse, o que é impossível uma vez que $a \neq b$.

A Foi uma boa resposta a que deste, se usarmos uma definição de limite não formalizada. Recorda-te, no entanto, que acabámos por chegar a uma versão formalizada da frase "u tem limite a", e que, portanto, agora só são aceitáveis argumentos que utilizem tal versão.

B Deixa-me ver se percebo o que estás a dizer... achas que a minha intuição de limite é boa... que com ela até consigo provar o que pretendes... mas não consideras isso suficiente... — pergunto-me porquê!

A A intuição é fundamental tanto para os conceitos como para as pistas que fornece para as demonstrações. Mas, depois de formalizado o quadro em que trabalhamos, as demonstrações só podem usar esse quadro formalizado e as regras da lógica.

B Queres com isso dizer que o quadro formalizado pode dar origem a resultados que escapam à nossa intuição?

A Disseste-o bem. Embora aqui (na unicidade do limite) não vá acontecer surpresa alguma, podes estar certo de que elas surgirão ainda no decorrer da nossa conversa.

B Vou, então, restringir-me à definição de "u tem limite a" e que é a seguinte

$$\forall_{r>0}\exists_{p\in\mathbb{N}}\forall_{n>p} \quad u_n \in V_r(a)$$

Ora, se u também tiver limite b e supusermos $a \neq b$, eu devo chegar, se a minha intuição está certa, a uma contradição — e tal contradição deve provir de: para todos os n suficientemente grandes, os u_n estarem perto de a e de b simultaneamente. Ora as "proximidades" de a e de b são dadas pelas vizinhanças de a e de b... e o que está numa não deve poder estar na outra, se eu as escolher bem, ou seja, se eu as escolher com raios suficientemente pequenos.

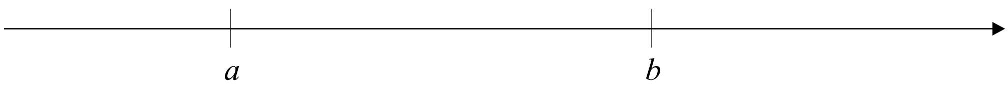
É isto?

A Continua.

B Posso fazer uma representação geométrica?

A Claro.

B Vou supor $a < b$



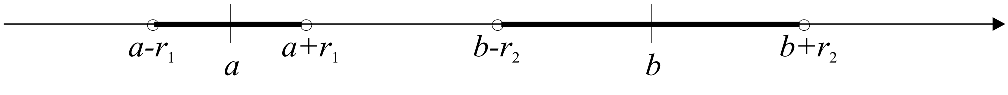
e agora vou escolher vizinhanças de a e de b, com raios r_1 e r_2

$$V_{r_1}(a), V_{r_2}(b)$$

tais que "o que esteja numa não possa estar na outra", ou seja, tais que elas sejam disjuntas

$$V_{r_1}(a) \cap V_{r_2}(b) = \emptyset$$

Geometricamente



Assim, como u tem limite a, considerando r_1 (ou seja $V_{r_1}(a)$), sei, por definição de limite, que existe uma ordem p, a partir da qual todos os u_n estão na $V_{r_1}(a)$, e também sei que, tomando r_2 (ou seja $V_{r_2}(b)$), existe uma ordem q (porventura diferente de p) tal que, a partir dela, todos os u_n estão na $V_{r_2}(b)$. Desta forma, a partir da maior das ordens p e q, todos os u_n estão na vizinhança $V_{r_1}(a)$ e na vizinhança $V_{r_2}(b)$, o que é impossível, pois que, então, estariam na intersecção

$$V_{r_1}(a) \cap V_{r_2}(b)$$

que é vazia.

A A demonstração está correcta se provares que existem r_1 e r_2 tais que $V_{r_1}(a) \cap V_{r_2}(b) = \emptyset$.

B Também tenho que provar isso?

A Claro.

B Ora, basta tomar r_1 (> 0) e r_2 (> 0) menores do que metade da distância entre a e b. Dito de outra forma, posso escolher

$$0 < r_1 < \frac{|a-b|}{2} \qquad \text{e} \qquad 0 < r_2 < \frac{|a-b|}{2}$$

A E se tomasses $r_1 = r_2 = \dfrac{|a-b|}{2}$?

B Também o poderia fazer uma vez que as vizinhanças são intervalos abertos nas duas extremidades.

A Obtivemos assim o seguinte resultado:

Teorema 1. *Seja u uma sucessão de termos reais e sejam a e b dois números reais. Se u tem limite a e tem limite b, então, a é igual a b.*

Trata-se, como disseste, de um resultado intuitivo, mas que, após demonstrado, nos permite introduzir o símbolo

$$\lim u$$

para designar o (único) limite de u (quando este exista).

B Queres dizer que, antes deste resultado, eu não podia utilizar o símbolo $\lim u$ para designar o número real a que fosse o limite da sucessão u?

A Repara no que disseste: "o número real a que fosse *o* limite da sucessão u". Quando o dizes já supões que a é único.

B Mas, se eu posso dizer que u tem limite a, por que razão não posso escrever
$\lim u = a$?

A Porque cada termo matemático tem de designar um único ente matemático, a fim de que não haja ambiguidade na linguagem matemática. Assim $\lim u$ tem de designar um único ente e é por isso que precisamos de demonstrar a unicidade do limite antes de introduzirmos $\lim u$.

B Tens razão!

A Considera, agora, uma sucessão u e designa por v uma qualquer subsucessão de u. v é ainda uma sucessão, não é?

B Sim.

A Então, de v podemos perguntar se tem ou não limite, mas se tiver ele será certamente único.

B Claro, uma vez que uma subsucessão é ainda uma sucessão, e que já provámos a unicidade do limite.

A Poderá uma sucessão sem limite ter alguma subsucessão com limite?

B Evidentemente. Basta considerar a sucessão (sem limite) w

$$0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots, 0, 2, \ldots$$

dada por

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad w_n = 1 + (-1)^n$$

Se considerarmos a subsucessão dos termos de ordem par, obtemos uma sucessão constante que tem por limite 2.

A Poderá uma sucessão com limite ter alguma subsucessão sem limite?

B Claro que não!

A Prova-o!

B É, para mim, intuitivo, já que uma subsucessão se obtém da sucessão inicial por supressão de termos.

A Recorda-te que agora estamos num quadro formalizado. . .

B Já sei... já sei... vou ter que fazer uma demonstração em que apenas utilize as noções de sucessão, subsucessão e limite, e as regras da lógica.

A É assim a Matemática!

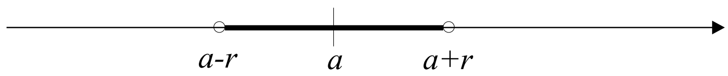
B E vou ter alguma surpresa?

A Não. A tua intuição está correcta.

B Deixa-me, então, ver... tenho uma sucessão u com limite a, e considero uma subsucessão v de u, que posso escrever na forma

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_n = u_{k_n}$$

onde k é uma sucessão de números naturais satisfazendo à condição (5). Quero, agora, provar que $\lim v = a$ e para isso vou recorrer à definição de limite. Dada, então, uma vizinhança r de a



devo encontrar uma ordem p, tal que, se $n > p$, se tenha $v_n \in V_r(a)$. Ora, eu sei que isso acontece com a sucessão u (porque $\lim u = a$) e ainda há pouco disse que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_n = u_{k_n}$$

Usando a minha intuição (as subsucessões obtêm-se por supressão de termos da sucessão original) deve-se ter

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad k_n \geq n$$

Será isto verdade? Ora... isso resulta imediatamente de k satisfazer à condição (5).

Então a demonstração é simples. Dada a $V_r(a)$, eu sei que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que, se $n > p$, se tem $u_n \in V_r(a)$ (porque $\lim u = a$) e, portanto, dada essa vizinhança, também a partir da ordem p, se tem

$$v_n \in V_r(a)$$

uma vez que, sendo $n > p$, vem $k_n \geq n > p$ e portanto $u_{k_n} \in V_r(a)$.

A Acabaste de demonstrar, de forma correcta, o seguinte

> **Teorema 2.** *Se u é uma sucessão de termos reais com limite a, então qualquer subsucessão de u também tem limite a.*

B Não sei qual a razão porque estás a dar tanta importância a este resultado. No fim, o que eu queria era ter um resultado que me garantisse a existência de limite e o que obtivemos foi "se o limite existe então. . . ", o que nada me diz sobre esse problema fulcral.

A Foi com grande satisfação que ouvi esta tua observação. De facto o resultado obtido não nos serve para provar a existência de limite, mas é um auxiliar precioso para provar que *uma sucessão não tem limite*.

B Estás a preocupar-te com as sucessões que não têm limite? Parece-me chocante!

A Não vejo porquê. Supõe que te dão uma sucessão e que te perguntam se ela tem limite. Se provares que ela não o tem respondeste à pergunta que te fizeram. Ora, para provares que ela não tem limite, basta-te encontrares duas subsucessões com limites distintos ou, então, uma subsucessão sem limite.

B Tens razão: isso é uma consequência do Teorema 2. O que eu gostava era de ver alguns exemplos. . .

A Vamos fazer aqui uma pausa — os exemplos aparecerão depois.

A Vamos recomeçar.

B Sim.

A Seja, então, u uma sucessão que poderá ter ou não limite, e seja v uma subsucessão de u com limite, que vamos designar por b ($\lim v = b$). Nestas condições dizemos que b é um *sublimite* de u.

B Um número real é sublimite de uma sucessão u se e só se for limite de alguma subsucessão de u?

A É essa a definição de sublimite.

B Mas não há unicidade da noção de sublimite!

A Pois não, o que implica que não podemos fixar um símbolo que designe os vários sublimites — mas podemos pensar no conjunto dos sublimites de uma sucessão u. Vamos designar esse conjunto por S_u. Sendo w a sucessão definida por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad w_n = (-1)^n$$

qual é o conjunto S_w?

B $S_w = \{-1, 1\}$.

A Será w uma sucessão com limite?

B Claro que não! — e uma justificação muito simples, que resulta da nossa conversa, é a seguinte: se w tivesse limite (chamemos-lhe c), então todas as suas subsucessões tinham limite c, pelo que S_w seria o conjunto (unitário) $\{c\}$. Ora, vimos que S_w tem dois elementos distintos, donde resulta que w não tem limite.

A Considera, agora, a sucessão r dada, informalmente, por

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots$$

e de maneira rigorosa por

$$r_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \dfrac{1}{\frac{n}{2}+1}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Identifica o conjunto S_r.

B Se eu considerar a subsucessão formada pelos termos de ordem ímpar, ela é a sucessão constante e igual a 1, logo tem limite 1, donde se conclui que 1 é sublimite de r ($1 \in S_r$).

Se considerar agora a subsucessão formada pelos termos de ordem par, que é

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad r_{2n} = \frac{1}{n+1}$$

imediatamente se vê que ela tem limite 0, pelo que 0 é sublimite de r ($0 \in S_r$).

Assim

$$\{0,1\} \subset S_r$$

mas não sei se

$$\{0,1\} = S_r$$

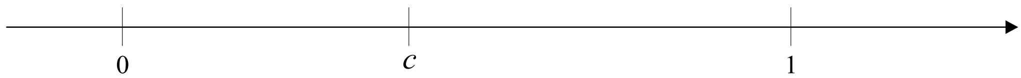
uma vez que poderiam existir outras subsucessões de r que tivessem limite diferente de 0 e de 1.

A Poderá isso acontecer?

B Penso que não... mas ainda não o sei justificar. Deixa-me pensar... suponhamos que havia uma subsucessão de r (chamemos-lhe s) que tinha por limite um número real c diferente de 0 e de 1...

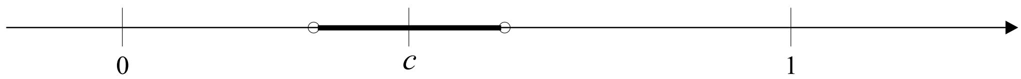
A Estás a tentar fazer uma demonstração por redução ao absurdo?

B Sim! E vou começar por supor que c está entre 0 e 1 ($0 < c < 1$);

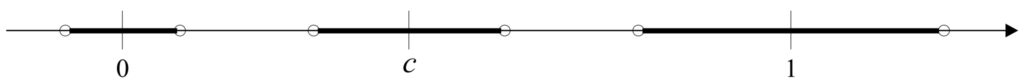


depois veremos os outros casos.

Consideremos, agora, uma vizinhança de c à qual não pertença nem 0 nem 1.



Se $\lim s = c$, então, a partir de certa ordem, todos os termos de s deveriam estar na vizinhança e portanto... já sei como faço a demonstração. Arranjo vizinhanças de 0 e de 1 que não intersectem a vizinhança de c.



Ora, como a subsucessão dos termos de ordem par tende para zero, sei que, a partir de certa ordem (digamos p), todos os termos de u com ordem par estão na vizinhança de zero que eu escolhi. Da mesma forma, a partir de certa ordem (que, neste caso, até pode ser 1), todos os termos de ordem ímpar de u estão na vizinhança escolhida de 1 (eles, até, são iguais a 1!). Daqui se conclui que, a partir da ordem p, nenhum termo da sucessão pode estar na vizinhança de c, o que implica que r não pode ter limite c.

Isto prova o que pretendia no caso $0 < c < 1$, faltando-me apenas tratar dos casos $c < 0$ e $c > 1$.

A Não digas mais. Quem resolveu o caso $0 < c < 1$ da forma como o fizeste, também sabe resolver os casos restantes.

Concluíste, assim, que S_r é igual a ...

B $S_r = \{0, 1\}$.

A Donde ...

B r não tem limite uma vez que tem dois sublimites distintos.

A Trata-se, efectivamente, de uma consequência do Teorema 2. Ora esse Teorema, com as novas notações, pode escrever-se na forma

$$\lim u = a \qquad \Rightarrow \qquad S_u = \{a\}$$

para toda a sucessão de termos reais u. Será verdadeira a proposição recíproca: para toda a sucessão u

$$S_u = \{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim u = a \ ?$$

B Perguntas-me se é verdadeiro que, sendo todos os sublimites iguais, e iguais a a, então a sucessão tem limite e o seu limite é a?

A É essa a pergunta.

B Parece-me que sim, uma vez que, se todas as subsucessões têm o mesmo limite...

A Penso que já estás a elaborar num erro!

B Nem me deixaste concluir a frase!

A Pois não, porque pressinto que há um erro na tua argumentação.

B Aonde?

A Disseste: "se todas as subsucessões têm o mesmo limite"...

B E isso não é equivalente a dizer que o conjunto dos sublimites é unitário?

A Não!

B Não sei porquê!

A O que é um sublimite?

B É o limite de uma subsucessão.

A E todas as subsucessões têm de ter limite?

B Pode, evidentemente, haver subsucessões sem limite.

A Então $S_u = \{a\}$ não é equivalente a "todas as subsucessões de u têm limite a".

B Tens razão! Podem existir subsucessões de u sem limite — em particular, o próprio u que, como vimos, é uma subsucessão de si próprio.

Assim $S_u = \{a\}$ apenas é equivalente a "todas as subsucessões de u com limite, têm limite a".

A Ainda acreditas que

$$S_u = \{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim u = a \text{ ?}$$

B Começo a duvidar... se eu conseguir encontrar uma sucessão u com um único sublimite, mas com uma subsucessão sem limite, então provo que é falsa esta última implicação. Consideremos, informalmente, a sucessão

$$0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, \ldots, 0, 1, -1, \ldots$$

Esta sucessão tem zero como sublimite e, se eliminarmos todos os termos nulos, a subsucessão restante não tem limite...

A Repara que pretendias encontrar uma sucessão com um só sublimite...

B É verdade! e esta tem, pelo menos três — $0, 1, -1$. Penso mesmo que só três... tem mesmo só três! — basta adaptar o raciocínio que atrás fiz para a sucessão r. Seja como for não é o exemplo que pretendia.

Dá-me uma sugestão.

A Pensa na sucessão dos números naturais.

B Mas essa não tem subsucessões com limite... Ah! é precisamente por não ter subsucessões com limite que ela vai ser importante. Se eu no exemplo anterior substituir a subsucessão $1, -1, 1, -1, \ldots$ pela sucessão dos números naturais, ou seja, se eu considerar a sucessão u definida, informalmente, por

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots$$

obtenho uma sucessão com um único sublimite ($S_u = \{0\}$) e que não tem limite.

A Concluíste assim que, sendo u uma sucessão de termos reais e $a \in \mathbb{R}$, se tem

$$\lim u = a \quad \Rightarrow \quad S_u = \{a\}$$

mas que *é falso* que

$$S_u = \{a\} \quad \Rightarrow \quad \lim u = a$$

e que, portanto, também *é falso* que

$$S_u = \{a\} \quad \Leftrightarrow \quad \lim u = a.$$

B Deixa-me que te diga que este resultado negativo me surpreendeu. Talvez porque eu só estivesse a pensar em sucessões com limite, ou, então, naquelas que têm dois, ou mesmo três, sublimites distintos, mas que não possuem subsucessões sem limite.

A Já reconheceste a importância das subsucessões sem limite, mas preocupou-me aquela frase em que referiste as sucessões com dois, ou mesmo três sublimites distintos. Não imaginas sucessões com quatro, dez, mil sublimites distintos?

B Mil sublimites distintos?! Com quatro... talvez uma adaptação daquele exemplo que te disse há pouco

$$0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, \ldots, 0, 1, -1, \ldots$$

e que tinha três sublimites. Ora, se eu for intercalando sempre o número dois

$$0, 1, 2, -1, 0, 1, 2, -1, 0, 1, 2, -1, \ldots, 0, 1, 2, -1, \ldots$$

obtenho, de facto, uma sucessão com quatro sublimites. Assim, para obter mil sublimites bastará intercalar um número suficiente de naturais, de uma forma semelhante à que foi descrita anteriormente.

Trata-se de uma resposta informal, evidentemente...

A Foi informal, mas estou a entender-te e não tenhas receio de me responderes às próximas perguntas de maneira informal. Peço-te, agora, um exemplo de uma sucessão u tal que $S_u = \mathbb{N}$.

B Queres um exemplo de uma sucessão cujo conjunto dos sublimites seja $\mathbb{N}$?! Mas $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito!

A Eu sei!

B Uma sucessão com infinitos sublimites?!

A Com o conjunto dos sublimites igual a $\mathbb{N}$, que é, de facto, um conjunto infinito.

B E isso existe?... Deixa-me pensar... será que posso utilizar o processo anterior... mas como posso, então, intercalar infinitos números? É certo que posso suprimir os termos que valem 0 e -1, porque não são números naturais

$$\cancel{0},\ 1,\ 2,\ \cancel{-1},\ \cancel{0},\ 1,\ 2,\ \cancel{-1},\ \cancel{0},\ 1,\ 2,\ \cancel{-1},\ldots$$

e que, em vez de $1, 2$, posso começar por escrever

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

e depois ir repetindo esta sequência finita de números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

mas assim só obtenho sete sublimites. Por outro lado, se eu escrever

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$$

uma vez que a sucessão dos números naturais não acaba, não posso "no fim" recomeçar a escrevê-la, porque ela não tem fim.

A Por que queres, usando a tua linguagem, intercalar de uma só vez a sucessão dos números naturais?

Pelo que eu percebi, pretendes garantir a existência de um sublimite à custa de um termo que se repete indefinidamente, o que é uma visão redutora, mas que basta para o exemplo que te pedi.

Vou dar-te uma pista. Começa por escrever

$$1, 1, 2$$

Se quiseres que 1 e 2 sejam termos indefinidamente repetidos, como continuarias?

B $1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots$.

A Mas assim três nunca seria um termo indefinidamente repetido.

B Tens razão. Mas, após escrever $1, 1, 2$ (onde repeti o número 1), na próxima sequência de números, onde vou repetir os números 1 e 2, posso introduzir o número três

$$1, 1, 2, 1, 2, 3$$

e quando voltar a repetir a sequência $1, 2, 3$, introduzo o número 4

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4$$

Se considerar a sucessão, dada informalmente, por

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

parece-me claro que qualquer número natural é um termo indefinidamente repetido — desde que ele apareça na sequência $1, 2, \ldots, l$, irá aparecer em todas as sequências seguintes que comecem com 1 e terminem com l.

A O que podes, então, concluir?

B Como qualquer termo indefinidamente repetido é um sublimite, $\mathbb{N}$ está contido no conjunto dos sublimites da sucessão anterior. Ora, parece-me claro que esta sucessão não pode ter mais sublimites. Tenho quase a certeza de que uma demonstração por redução ao absurdo resolve o problema.

A E tens razão, o que não quer dizer que o não faças.

B Agora?

A Não! A tua intuição está correcta.

B Então, embora dada informalmente, encontrei uma sucessão u tal que $S_u = \mathbb{N}$.

A Achas chocante o resultado?

B Não te sei dizer... surpreende-me que tal possa acontecer... talvez por nunca ter pensado nisso...

A melhor resposta que te posso dar é a seguinte: de início: surpresa; depois: perplexidade; finalmente: algum espanto. — Mas nada que me perturbe a intuição.

A Considera, agora, uma sucessão w cujo conjunto de termos seja $\mathbb{Q}$.

B Espera... tal sucessão não existe... não pode existir!

A Porquê?

B Sejamos cautelosos. Diz-me a minha intuição que não existe uma sucessão cujo conjunto dos termos seja o conjunto dos números racionais.

A Volto a perguntar-te: porquê?

B Não me é claro ainda, porque muito do que vem da intuição não encontra rapidamente uma formulação clara. Preciso de tempo...

A Não te estou a pressionar. Leva o tempo que quiseres.

B ...

A ...

B Parece-me que já consegui organizar as ideias...

A Diz, então.

B Suponhamos que existia uma sucessão w cujo conjunto dos termos fosse $\mathbb{Q}$. É claro que podemos suprimir os termos que se repetem (todos, menos um), porque os suprimidos não contribuiriam para a introdução de novos racionais. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que os termos de w são todos distintos. Tais sucessões, quando as imagino a serem representadas na recta real, vejo um ponto a ser marcado aqui, outro ali, outro acolá... e assim sucessivamente... cada um "bem espaçado" de *todos* os outros.

Ora, como pode isso acontecer com uma sucessão w cujo contradomínio seja $\mathbb{Q}$? O conjunto dos números racionais está tão bem distribuído na recta real que, dados dois reais distintos, por mais próximos que estejam, existem sempre infinitos números racionais entre eles. Como podemos, então, numerar um tal conjunto? — dizer dos seus elementos que este é o primeiro (ou seja, a $n = 1$, corresponde este), que aquele é o segundo (ou seja, a $n = 2$, corresponde aquele)... e assim sucessivamente... A minha intuição diz-me, de forma categórica, que tal sucessão não existe!

Estou errado?

A Estás!

B Não pode ser!

A E, contudo, existem sucessões cujo conjunto dos termos é $\mathbb{Q}$!

B Dá-me um exemplo!

A Vais vê-lo mais tarde[1].

B E por que não agora?

A Porque temos de terminar a nossa conversa.

B Responde-me só a uma questão.

A Diz.

B Qual é o conjunto dos sublimites dessa sucessão w?

A A tua pergunta está mal formulada, uma vez que uma sucessão não fica definida pelo conjunto dos seus termos — se este tiver mais do que um elemento, existem sempre infinitas sucessões com o mesmo conjunto de termos, e o conjunto dos sublimites depende de cada uma delas.

B Tens razão.

A No entanto, no caso em questão tal não acontece. Qualquer sucessão cujo conjunto de termos seja $\mathbb{Q}$, tem, por conjunto dos sublimites, o conjunto $\mathbb{R}$.

B $\mathbb{R}$?

A Sim.

B Isso é ainda mais espantoso!

A Vou fazer-te um desafio:

admite que existe uma tal sucessão w e demonstra que $S_w = \mathbb{R}$.

B Posso fazer a demonstração com o pouco que até agora sei?

A Podes.

B Mesmo sendo contra a minha intuição?!

[1] Ver no Capítulo Cardinalidade. (*Este capítulo acabou por não ser escrito embora fizesse parte do plano original. (N.E.)*)

A A tua intuição irá melhorando com o tempo — quanto mais souberes sobre um assunto mais apurada ela será, e o problema que te propus é daqueles que a faz refinar.

B Presumo que a demonstração não será simples.

A Não. Não é simples mas é fazível com o conjunto de conhecimentos que tens. Claro que te levará algum tempo... mas, acredita-me, não é tempo perdido.

B Parece-me que só agora começo a compreender verdadeiramente uma coisa em que tanto insistes.

A E que é...?

B A necessidade de demonstrar aquilo que afirmamos. A demonstração não é um luxo, mas uma necessidade — mesmo sobre resultados que nos parecem evidentemente verdadeiros, podemos estar enganados.

A Como já te disse, a intuição é um bem inestimável, mas nunca poderás garantir, perante uma dada questão *matemática*, que ela te dará a resposta correcta.

Tanto com os sucessos, como com os fracassos, a intuição vai-se apurando, o que a torna cada vez mais poderosa, mas nunca determinante.

B Antes de terminarmos a nossa conversa, ainda te queria pôr uma pergunta.

A Qual é?

B Existem sucessões cujo conjunto de termos seja $\mathbb{R}$?

A Não.

B Graças a Deus!

As sucessões monótonas e limitadas e o axioma do supremo

B Há que tempo não falávamos e eu que queria tanto discutir contigo...

A Sobre?...

B Sobre o conjunto dos sublimites de certas sucessões e de alguns problemas que entretanto me ocorreram.

A Pois desilude-te. Para hoje tenho um assunto bem preciso...

B Que é?...

A O das sucessões monótonas.

B Não me digas!

A Porquê?

B Sucessões monótonas depois dos problemas excitantes da última sessão. Francamente!

A Monótonas não tem aqui o significado que habitualmente se dá a esta palavra.

B Ah?...

A O melhor é começarmos com alguns exemplos. Considera as sucessões u, v, w e z definidas por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad u_n = n, \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_n = 1 - \frac{1}{n},$$
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad w_n = -\frac{1}{n}, \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad z_n = 1.$$

Achas que estas sucessões têm alguma coisa em comum?

B Sob que ponto de vista? Se pensarmos na existência de limite...

A Não — não é na convergência das sucessões que estou interessado. Pensa antes na relação de ordem que, para cada uma delas, existe entre os termos.

B Não sei se estou a perceber bem a tua sugestão... mas comecemos com a primeira sucessão e com os seus termos. Falaste-me da relação de ordem entre os termos, não foi?

A Sim.

B Bem... então o primeiro termo u_1 (= 1) é menor do que o segundo termo u_2 (= 2) e este é menor do que u_3 (= 3), e assim sucessivamente...

A Formaliza!

B Estou a dizer que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

A Assim
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad u_n < u_{n+1}.$$

B Claro.

A E será esta uma característica comum às quatro sucessões?

B Deixa-me ver... $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $v_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$... ora, como $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, vem $v_n < v_{n+1}$.

A Estou de acordo, mas explicita melhor o teu raciocínio.

B É fácil: se a 1 subtrairmos um número e se a 1 também subtrairmos um outro número que seja... isto está a ficar confuso! O melhor é fazer a subtracção entre v_{n+1} e v_n. Assim, tudo fica claro
$$v_{n+1} - v_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$$
pelo que
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad v_{n+1} > v_n.$$

A Perfeito.

B Quanto a w não há dúvida:
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} - \frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1},$$
tendo-se, assim,
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad w_n > w_{n+1}.$$
Agora a sucessão z é que já não satisfaz aquilo que pensámos ser uma característica comum, pois que
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} z_n = z_{n+1}.$$

A Tens razão — e, no entanto, estás tão perto de encontrar uma característica comum...

B Não digas mais... deixa-me pensar... Ora... ora, é simples! Uma característica comum é
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad a_n \leq a_{n+1}$$
onde a é uma qualquer das sucessões dadas.

A Obtiveste o que pretendia. Podemos, agora, dar a seguinte definição:

Sendo a uma qualquer sucessão de termos reais, diz-se que a é crescente sse

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

Desta definição resulta que as sucessões u, v, w, z são...

B Crescentes.

A Muito bem.

B Desculpa, mas tenho uma objecção.

A Diz.

B Eu sei que as definições não se discutem, mas o mesmo não acontece com a terminologia, que podemos considerar ser inadequada. Dizer que uma sucessão constante, como a sucessão z, é crescente não me parece apropriado. Por que razão não se dá outro nome às sucessões a que chamaste crescentes?

A Que nome escolherias para a sucessão dada, informalmente, por

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots ?$$

Dirias que ela não é crescente?

B Eu diria que é crescente.

A E, no entanto, esta sucessão (designemo-la por ω) satisfaz a

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \omega_n \leq \omega_{n+1}$$

mas não a

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \omega_n < \omega_{n+1}.$$

B Tens razão. Contudo...

A Não alonguemos esta discussão porque a terminologia é também largamente arbitrária. Talvez com a seguinte definição suplementar já te sintas satisfeito.

Uma sucessão b de números reais diz-se estritamente crescente sse

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad b_n < b_{n+1}.$$

B Esta definição não elimina a outra, pois não?

A Não! Trata-se de uma nova definição. Diz-me, agora, como classificarias as sucessões u, v, w, z, ω atendendo às definições dadas.

B As sucessões u, v e w são estritamente crescentes e, portanto, crescentes, uma vez que qualquer sucessão estritamente crescente é também crescente.

As sucessões z e ω são crescentes, mas não são estritamente crescentes.

A Está certa a resposta. Quero, agora, pedir-te que me dês as definições — que julgares apropriadas — das noções de sucessão decrescente e de sucessão estritamente decrescente.

B Não me parece difícil. Direi que uma sucessão u de termos reais é decrescente sse

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad u_{n+1} \leq u_n$$

e direi que uma sucessão v de termos reais é estritamente decrescente sse

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad u_{n+1} < u_n.$$

A Muito bem. Dá-me agora exemplos de sucessões decrescentes e de sucessões estritamente decrescentes.

B Ora, basta adaptar os exemplos anteriores. As sucessões a, b e c definidas por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n = -n, \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\ c_n = \frac{1}{n}$$

são estritamente decrescentes; a sucessão d definida por

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad d_n = 1$$

é decrescente, e a sucessão definida (informalmente) por

$$-1,\ -1,\ -2,\ -2,\ -3,\ -3,\ -4,\ -4, \ldots$$

é decrescente, mas, tal como a sucessão d, não é estritamente decrescente.

A Disseste, e bem, que d é uma sucessão decrescente e tínhamos visto atrás que ela também é crescente. Assim existem sucessões que são crescentes e decrescentes!

B A culpa é tua! Com a definição de sucessão crescente que deste. . .

A Tens razão. Não me estou a queixar. Estava apenas a constatar esse facto. Mas, diz-me: existem outras sucessões, que não as constantes, que sejam crescentes e decrescentes?

B Deixa-me pensar. Se u é crescente, então

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$$

e se u é também decrescente, então

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

Concluímos daqui que u deve satisfazer a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n \leq u_{n+1} \ \wedge \ u_{n+1} \leq u_n)$$

donde

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n.$$

Assim

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_1$$

pelo que u é uma sucessão constante. Logo, as únicas sucessões crescentes e decrescentes são as sucessões constantes.

A É uma demonstração simples, é certo, mas foi bem feita. Estou satisfeito. Diz-me, agora: será que toda a sucessão u de termos reais é crescente ou decrescente?

B Claro que não! Basta considerar a sucessão u dada por

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

ou, formalmente, por

$$u_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}.$$

Esta sucessão não é crescente porque $u_1 > u_2$ e não é decrescente porque $u_2 < u_3$. Aliás, parece-me que as sucessões que são crescentes ou decrescentes. . .

A Espera um pouco. Vamos dar um nome às sucessões que são crescentes ou decrescentes. Vamos chamar a tais sucessões, sucessões monótonas e, já agora, às sucessões que são estritamente crescentes ou estritamente decrescentes, damos o nome de sucessões estritamente monótonas.

B Monótonas, porquê?

A Porque não varia a natureza do crescimento entre os seus termos.

B Ah?!

A Mas, desculpa ter-te interrompido, ias dizer que...

B Eu ia dizer que... já me lembro... que as sucessões a que passámos a chamar monótonas não são o caso vulgar entre as sucessões. Basta considerar uma sucessão u estritamente crescente e trocar os dois primeiros termos para obter uma sucessão não monótona. E quem diz os dois primeiros termos, diz dois quaisquer termos.

A É verdade, no sentido em que se trata de uma restrição grande dizer que uma sucessão u é monótona. Por isso, porque elas são especiais, as sucessões monótonas têm propriedades importantes que não são verdadeiras, em geral, ou seja, que não são verdadeiras para todas as sucessões.

B E são essas propriedades importantes que pretendemos estudar?

A Exactamente.

B Já estou a vislumbrar o tipo de propriedades importantes em que estás a pensar...

A Que é?...

B A relação entre a monotonia e a convergência.

A Acertaste! Mas como vamos fazer agora uma pausa, peço-te que penses mais detalhadamente sobre o assunto e que me faças um resumo das conclusões a que chegaste na nossa próxima conversa.

A Estou muito interessado no que tens para me dizer.

B Não podias ter dito coisa pior...

A Porquê?

B Parece-me que as tuas expectativas são grandes e eu não tenho muito a dizer. Para já, não provei nada e nem sequer cheguei a formalizar as ideias que tive.

A Teres ideias já é um bom sinal. Vamos a elas.

B Provavelmente o melhor é começar com as sucessões que inicialmente me deste e que vou, agora, designar por a, b, c, d e e. Elas foram definidas por:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n = n,\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n = 1 - \frac{1}{n},\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ c_n = -\frac{1}{n},\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ d_n = 1$$

e e foi, informalmente, definida por

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\dots$$

Todas elas são crescentes, e, já agora, quero dizer-te que só pensei em sucessões crescentes e na sua relação com a questão da convergência.

A Foi uma boa escolha.

B Ora, facilmente se vê que

$$\lim b_n = 1, \quad \lim c_n = 0, \quad \lim d_n = 1$$

e que a e e não têm limite.

Assim, uma primeira conclusão, muito simples, é que não basta a uma sucessão ser crescente para ter limite. Isso levou-me à seguinte pergunta:

Qual é a diferença essencial entre as sucessões a e e e as sucessões b, c e d?

A Trata-se de uma excelente pergunta!

B Ainda bem que o dizes. O que eu não sei é se estarás de acordo com a resposta que encontrei.

A Que foi?

B É um pouco confuso o que te vou dizer...

A Diz.

B É que as sucessões a e e não só são crescentes como "ultrapassam" qualquer número real que eu considere.

A Foi até aí que chegaste?

B Foi. Estou a ver que te desiludi!

A De maneira nenhuma! Disseste que tinhas tido ideias e tiveste! Disseste que não as tinhas formalizado, e reconheceste, assim, a tua principal dificuldade.

Estou satisfeito. Temos uma boa base para continuarmos a trabalhar.

B E qual é a base?

A A tua frase

as sucessões a e e não só são crescentes como "ultrapassam" qualquer número real que eu considere.

B Mas foi precisamente esta ideia que eu considerei confusa!

A É mais do que confusa — carece de sentido, o que é pior. No entanto, parece-me que, intuitivamente, atingiste o cerne do problema. Só te falta formalizar.

B Formalizar o quê?

A A frase

a sucessão ultrapassa qualquer número real que eu considere.

O que entendes por "ultrapassar" um número real qualquer?

B Estou a ver... O que eu pretendo dizer é que, dado um número real qualquer, todos os termos da sucessão, a partir de certa ordem, são maiores do que esse número.

A Atendendo a que a sucessão é crescente, precisas de dizer que *todos os termos, a partir de certa ordem, são maiores* do que...

B Não! Basta-me dizer que, para cada número real α, existe um termo u_n que é maior que α, porque, sendo a sucessão crescente, todos os outros termos com ordens superiores a n também são maiores que α.

A E não te achas, agora, capaz de formalizar a tua ideia?

B Penso que sim... Basta-me dizer que para todo o número real α (formalizando $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$), existe um termo u_n (formalizando $\exists\, n \in \mathbb{N}$) tal que $u_n > \alpha$.

Assim, dada uma sucessão u de termos reais, o que se pretendia dizer com a frase

u ultrapassa qualquer número real que eu considere

pode ser escrito, rigorosamente, na forma seguinte:

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\exists_{n\in\mathbb{N}} \quad u_n > \alpha. \tag{6}$$

A Esta é, então, a característica comum às sucessões a e e. Esquece-te, agora, das sucessões a e e e pensa apenas numa sucessão u crescente que satisfaça à condição (6). Poderá esta sucessão ter limite?

B Claro que não!

A Estou de acordo contigo. Mas o que afirmaste tem de ser demonstrado. É que não basta ter uma ideia — tem que se provar que essa ideia é "boa" mesmo que ela nos pareça, intuitivamente, uma "boa ideia".

B Queres, então, que eu prove que, se u é uma sucessão crescente satisfazendo a (6), então u não tem limite.

A Vou, até, propor-te que demonstres que tal é verdade, mesmo que a sucessão u não seja crescente. Assim, o que pretendo que proves (e é simples) é a seguinte proposição:

Se u é uma sucessão de termos reais satisfazendo a (6), então u não tem limite.

B Eu só tinha pensado no caso em que u era crescente... Tens agora que me deixar pensar...

A Compreendeste-me mal! Este é um exercício para resolveres depois da nossa conversa. É que não temos muito tempo a perder.

B E, diz-me, no que estás verdadeiramente interessado não é, propriamente, nas sucessões a e e, mas nas sucessões que satisfazem a (6). O que te interessa são, precisamente aquelas que não satisfazem a (6). São essas que pretendes demonstrar serem convergentes! É assim, ou não?

A Estou, efectivamente, interessado nas sucessões *crescentes* que não satisfazem a (6).

B Sucessões como b, c e d, que são convergentes.

A Sim! Mas comecemos por formalizar o que se entende por uma sucessão u não satisfazer a (6).

B Isso é fácil. Basta negar (6). Assim, uma sucessão u (crescente ou não) não satisfaz a (6) sse

$$\exists_{\alpha\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\quad u_n \leq \alpha. \tag{7}$$

A É esta a altura para introduzirmos alguma terminologia. Uma sucessão u diz-se majorada sse (7) for verdadeira, e a um tal α chama-se majorante de u.

Vou-te, agora, fazer três perguntas:

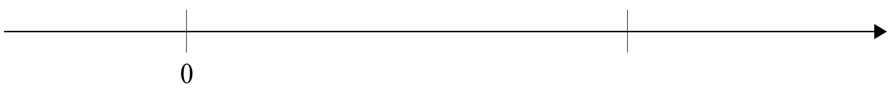
1ª Poderá uma sucessão ter um único majorante?

2ª Poderá uma sucessão não majorada ser convergente?

3ª Poderá uma sucessão majorada *não* ser convergente?

B Andaste depressa demais. Deixa-me, antes de responder às tuas perguntas, ter uma ideia geométrica do que se entende por majorante e por sucessão majorada.

Marquemos na recta real um número α.



Ora, dizer que α é um majorante da sucessão u, significa, geometricamente, que todos os termos de u se devem marcar na recta real à esquerda de α (podendo, evidentemente, alguns deles serem α). Dizer que u é majorada equivale a dizer que tem pelo menos um majorante e que, portanto, existe um α como o descrito anteriormente.

A Só uma pergunta.

B Diz.

A No desenho que fizeste o número α é maior do que 0 e. . .

B Também o poderia ter marcado igual a 0, ou menor do que 0, mas quando se faz uma representação geométrica tem de se colocar o número α nalgum sítio — foi um acaso marcá-lo maior do que 0.

A Está bem. Vamos, então, às perguntas que te fiz.

B A resposta à primeira é muito simples. Se α é um majorante da sucessão u, qualquer número maior do que α também é um majorante de u. Se uma sucessão tem um majorante tem, certamente, infinitos majorantes. Isso é muito claro tanto geometricamente como analiticamente, recorrendo à proposição (7).

Quanto à segunda questão a resposta também me parece simples. Com efeito se u não é majorada então u não satisfaz a (7) e portanto satisfaz a (6). Ora, a tua pergunta é equivalente ao exercício que pretendias que eu resolvesse posteriormente...

A Não precisas de dizer mais.

B Finalmente, para responder à tua questão, basta considerar u definida por $u_n = -n$, para todo o n natural, para encontrarmos uma sucessão majorada (-1 é um majorante) que não tem limite. A resposta é, portanto, negativa.

A As perguntas eram simples e as respostas foram igualmente simples. Estou satisfeito. A questão que, agora, te vou propor é mais delicada:

Poderá uma sucessão crescente e majorada não ser convergente?

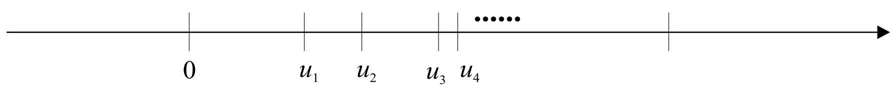
B Chegámos, enfim, com outra roupagem, à questão natural.

A Não é de roupagem que se trata...

B Eu sei! Formalizámos o problema... e, acredita-me, quando pensei nas sucessões b, c e d e noutras semelhantes, a minha principal dificuldade foi não ter nada a que me agarrar além do crescimento. Agora tenho mais uma noção, e bem definida — a de sucessão majorada. Desculpa a leviandade do uso do termo roupagem.

A Não te recrimines. Vamos tentar resolver o problema.

B Ora bem, temos uma sucessão crescente e que é majorada. Seja α um majorante de u e deixa-me fazer uma representação geométrica da nossa situação.



De uma forma imprecisa, posso dizer que os u_n vão crescendo mas nunca ultrapassam α, pelo que me parece, intuitivamente, verdadeiro que a sucessão convirja para um determinado número real

$\leq \alpha$. Mas como posso provar este resultado, se nem sequer possuo um candidato a limite?

A Poderá esse limite ser α?

B Só com muita sorte, porque α é um majorante e atrás vimos que existem infinitos majorantes.

A O que estás a dizer é que α pode ser um majorante demasiado grande. O que podes, então, fazer?

B Posso ir "diminuindo" α mantendo-o, no entanto, como majorante. Diminuindo-o, diminuindo-o até... até não o poder diminuir mais.

A Acho que estás a pensar bem, mas a linguagem é tão imprecisa...

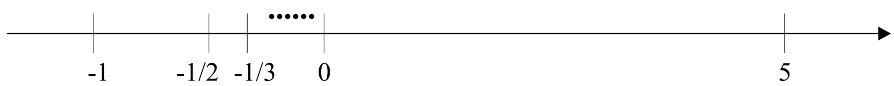
B Talvez eu me explique melhor com um exemplo e tire daí posteriormente uma sugestão para um raciocínio geral.

A Faz o que achares melhor.

B Considera a sucessão c dada por

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad c_n = -\frac{1}{n},$$

que sabemos convergir para zero, e escolhe $\alpha = 5$. Uma representação geométrica desta situação é:



O número 5 é, evidentemente, um majorante da sucessão, uma vez que

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad -\frac{1}{n} < 5.$$

Ora, os números $4, 3, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ também são majorantes da sucessão c. Podemos mesmo dizer que todos os números reais maiores ou iguais a zero são majorantes da sucessão c, e ainda podemos afirmar mais: qualquer número real menor do que zero já não é majorante de c. Assim, quando dizia que podíamos ir diminuindo α (neste caso 5) até não o poder diminuir mais (mantendo-o majorante), o que eu queria dizer é que 5 é um majorante de c e qualquer número menor que 5 ainda é majorante de c desde que não seja negativo. Há, neste caso, uma altura em que, se diminuirmos o majorante (ou seja, se considerarmos um número real menor) já não obtenho um majorante. Para c "essa altura" é o número zero.

A É espantoso como tudo é mais simples quando temos definições precisas, como vais ver. Continuemos a pensar na sucessão c, mas em vez do raciocínio que fizeste, considera antes o conjunto dos majorantes de c, que é...

B É o intervalo $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$.

A Então o elemento deste intervalo que procuravas era o número...

B O número 0.

A Que relação estabeleces entre o número 0 e o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$ dos majorantes de c?

B Zero é o menor dos majorantes.

A Assim, o limite da sucessão c é...

B O menor dos majorantes de c.

A Voltemos, então, à questão que te coloquei:

Poderá uma sucessão crescente e majorada não ser convergente?

B Penso que não. Toda a sucessão u crescente e majorada deve ser convergente e, agora, até já tenho um candidato a limite: o menor dos majorantes de u. Deixa-me testar esta conjectura com as sucessões b e d. Ora, o conjunto dos majorantes de b é o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1\}$ e portanto o menor dos majorantes é "1" que é, efectivamente, o limite de b. No caso da sucessão d, o conjunto dos majorantes é igualmente $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1\}$ e o limite de d é também o menor dos majorantes.

A Testaste a tua conjectura com apenas três sucessões, todas elas muito simples.

B Eu sei! Mas também é verdade que, de uma forma mais confusa, já tinha conjecturado a convergência das sucessões crescentes e majoradas — o que me faltava era o candidato a limite. Isso, e uma terminologia adequada.

A Estás, então, em condições de demonstrares o seguinte teorema importante:

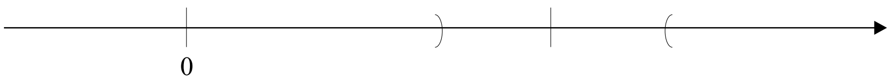
> **Teorema 3.** *Toda a sucessão de termos reais, crescente e majorada é convergente.*

B Queres que o demonstre agora, ou é assunto para pensar mais tarde?

A É para fazeres agora.

B Vou considerar uma sucessão u crescente e majorada. Seguidamente penso no conjunto dos majorantes de u e escolho o menor dos majorantes, que vou designar por α.

Para provar que $u \to \alpha$ vou recorrer (não me parece ter outra alternativa) à definição de limite. Consideremos, então, uma vizinhança ε de α ($V_\varepsilon(\alpha) =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$).



e procuremos uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que a partir dela todos os u_n estejam em $V_\varepsilon(\alpha)$.

O problema, como sempre, está numa boa escolha da ordem p. Ora, ainda não usei a hipótese da sucessão ser crescente, nem o facto de α ser o menor dos majorantes. Se α é o menor dos majorantes, então $\alpha - \varepsilon$ não pode ser um majorante de u, pelo que deve existir um termo u_k tal que $u_k > \alpha - \varepsilon$... e... do crescimento de u... resulta que... Pronto, já está!

A Já está o quê?

B Já terminei a demonstração. Basta escolher para p o natural k, porque, sendo $u_k > \alpha - \varepsilon$ e u crescente, se n for maior do que p ($= k$), tem-se, por um lado

$$\alpha - \varepsilon < u_p \leq u_n$$

e por outro,

$$u_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

uma vez que α é majorante de u. Assim, a partir da ordem p ($= k$), todos os u_n estão na $V_\varepsilon(\alpha)$, como pretendíamos demonstrar.

A Fizeste um bom trabalho e, talvez não o saibas, o teorema que acabaste de provar é um resultado fundamental no estudo das sucessões. Numa outra conversa ainda haveremos de o considerar sob outra perspectiva. Por agora só tenho uma pergunta a fazer: onde é que esta demonstração falha (porque tem de falhar!) se considerarmos as sucessões a e e (que sabemos não serem convergentes)?

B Deixa-me repensar a demonstração com cuidado... Ora, falha logo no início da demonstração: como as sucessões a e e não são majoradas, não existe conjunto dos majorantes...

A Não existe conjunto dos majorantes!??

B Bem... não existem majorantes...

A Com isso estou de acordo!

B Então o conjunto dos majorantes não tem elementos... Ah! desculpa, o conjunto dos majorantes das sucessões a e e é o conjunto vazio. Aliás, o mesmo acontece com qualquer sucessão não majorada — o conjunto dos seus majorantes é o conjunto vazio. A demonstração falha quando escolho o menor dos majorantes, que não existe para uma sucessão não majorada.

A Agora estamos de acordo.

Foi por tua ideia que começámos com as sucessões crescentes e a sua relação com a noção de convergência, mas é de prever que algo semelhante, relativamente à convergência, ocorra com as sucessões decrescentes. Por isso peço-te que, sucintamente, me digas como tratarias esse caso.

B Se bem me lembro, começámos por dividir as sucessões crescentes em duas categorias distintas: as majoradas e as não majoradas. Que terminologia devo agora utilizar?

A Em vez do termo "majorada" usa o termo "minorada" e em vez de "majorante" usa "minorante".

B Dada, então, uma sucessão u (decrescente ou não) digo que um número real α é um minorante de u sse

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \alpha \leq u_n.$$

Digo, também, que a sucessão u é minorada sse tiver pelo menos um minorante, ou seja, u é minorada sse

$$\exists_{\alpha\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \alpha \leq u_n.$$

Evidentemente, se existir um minorante α de u, todos os números reais menores do que α também são minorantes de u.

Depois vimos que... deixa ver se me recordo... Ah! Lembro-me agora que me propuseste um exercício, para ser resolvido posteriormente, e que consistia em provar que

Toda a sucessão não majorada não é convergente. (8)

Ora, passando ao simétrico, devo concluir que

Toda a sucessão não minorada não é convergente. (9)

A Excelente! E vou aproveitar o que disseste para introduzir mais alguma terminologia: dada uma sucessão de termos reais, diz-se que u é limitada sse for majorada *e* minorada.

Assim, uma sucessão não limitada, a que também se chama ilimitada, é uma...

B É uma sucessão que não é majorada *ou* não é minorada.

A Podes, assim, encontrar uma proposição que englobe os resultados (8) e (9).

B Claro! Posso dizer que

Toda a sucessão não limitada não é convergente. (10)

A Trata-se de um critério simples para ver que uma sucessão não é convergente. Com efeito, basta ver que tal sucessão não é majorada ou não é minorada.

E, diz-me, o que podes, usando (10), garantir para uma sucessão convergente?

B Se u for convergente, ela não pode ser ilimitada, logo tem de ser limitada. Assim

Toda a sucessão convergente é limitada. (11)

A Foi uma boa discussão sobre sucessões majoradas, minoradas e convergentes e, com certeza, mais resultados poderíamos obter usando apenas estas três noções. Mas, nesta altura, estamos interessados nas sucessões u que são decrescentes e minoradas, uma vez que já viste que as não minoradas não eram convergentes.

B Voltemos, então, às sucessões decrescentes. Sendo u uma sucessão decrescente, só temos duas hipóteses: ou u é minorada ou u não é minorada. Como disseste, se u não é minorada, u não é convergente. Se u for minorada tenho quase a certeza de que ela é convergente.

A Quase?!

B Eu disse "quase" porque aprendi contigo a não afirmar que uma proposição é verdadeira sem a ter demonstrado antes.

A Tens toda a razão! Sou eu que peço desculpa.

B Mas não deve ser difícil a demonstração. O candidato a limite, neste caso, deve ser o maior dos minorantes. E, agora, devo fazer apenas uma adaptação da prova que fiz para o teorema 3. Deixa-me ver... Se α for o maior dos minorantes, então $\alpha + \varepsilon$ não pode ser um minorante... e portanto... portanto... já está!

A Desta vez acredito plenamente no teu "já está"!

B Obtivemos, assim, dois resultados fundamentais para as sucessões.

A Dois resultados que podemos fundir num só.

B Como?!

A Uma sucessão crescente pode, como vimos, não ser majorada... e minorada? Poderá ela não ser minorada?

B Minorada?... claro que tem de ser minorada — u_1 é um minorante, uma vez que

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad u_1 \leq u_n.$$

A De modo que...

B Não digas mais! Já estou a ver aonde queres chegar. Como toda a sucessão crescente é minorada, dizer que ela é majorada equivale a dizer que é limitada. Assim, o teorema 3 pode escrever-se na forma:

Toda a sucessão crescente e limitada é convergente.

Ora, se uma sucessão for decrescente, ela é, certamente, majorada, pois que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad u_n \leq u_1.$$

Assim, dizer que uma sucessão u decrescente é minorada, equivale a dizer que ela é limitada, pelo que o segundo teorema fundamental pode escrever-se na forma:

Toda a sucessão decrescente e limitada é convergente.

A Continuas, no entanto, a ter dois resultados — um para as sucessões crescentes e outro para as sucessões decrescentes.

B Mas para obter um único teorema que englobe estes dois, basta recordar a definição que deste de sucessão monótona: uma sucessão u diz-se monótona sse for crescente ou decrescente.

A Quero dar-te o prazer de seres tu a enunciares esse resultado fundamental a que damos o nome de *Teorema das sucessões monótonas e limitadas*.

B Ei-lo:

Teorema 4 (das sucessões monótonas e limitadas)**.** *Toda a sucessão de termos reais, monótona e limitada é convergente.*

Mas, agora, peço-te uma pausa — é que a nossa conversa já vai longa...

A Não o nego. Mas não quero que descanses sobre o trabalho feito. Vou-te levantar, maldosamente, uma dúvida: Será que, efectivamente, provaste o Teorema das sucessões monótonas e limitadas? Na tua demonstração não faltará algo?

B Estarás a enganar-me?... Maldosamente, como disseste...

A Não! Há um argumento, que utilizaste, e que não provaste!

B Ah?!...

B Isso não se faz!

A O quê?

B Deixar-me acreditar que tudo estava bem, e, quando já começava a descansar (e bem tinha direito a isso!), introduzires o gérmen da dúvida...

A Confesso-te que, para mim, também não foi agradável, mas foi o que achei mais apropriado para que pudesses melhor...

B Descansar!

A Compreender um dos muitos segredos dos números reais.

B Dos números reais! Essa é boa! Nós estamos no capítulo das sucessões...

A ... das sucessões de termos...

B ... reais...

A E acaso acharás tu que podes discursar bem sobre as sucessões de termos reais, relegando estes para um capítulo passado e estanque, que já nada tem a ver com as noções que constróis sobre ele?

B Parece-me injusta essa observação — eu só usei propriedades triviais dos números reais...

A Olha que não!

B Não?

A Não!

B Dá-me um exemplo!

A Na realidade não foram muitas — foi só uma! Mas sobre essa pode escrever-se um livro inteiro.

B Ah! Não é coisa de pormenor... Trata-se de algo essencial.

A Claro! Nem de outra maneira se poderia justificar a minha atitude. Quis que pensasses bem sobre o assunto para que visses quão naturais e subtis são por vezes os erros que cometemos. E tais erros são tanto mais frequentes quanto sobre o tema mais pensámos — nós julgamos, então, a intuição infalível e, sem darmos conta, ela falha num passo "simples", que pode ser fundamental.

B Foi isso que me aconteceu?

A Foi!

B Aonde?

A Recomeça a tua demonstração de que as sucessões de termos reais, crescentes e majoradas são convergentes.

B O meu primeiro passo foi encontrar um candidato a limite. Por tua sugestão, pensei no conjunto dos majorantes da sucessão e depois escolhi o menor deles...

A Pára!

B Aqui?

A Precisamente! Como provas que existe o menor dos majorantes?

B Mas... a sugestão foi tua.

A Foi só uma sugestão! Mas isso não te dispensa de a demonstrares.

B Mas o limite tem de ser o menor dos majorantes! Disso não tenho a menor dúvida... pelo menos intuitivamente... Ou será que a minha intuição me está a enganar de tal forma que?...

A O problema não está aí. Apenas pretendo que me justifiques que existe o menor dos majorantes.

B Queres então que prove a proposição seguinte:

> **1.** *Sendo u uma sucessão crescente e majorada, existe o menor dos majorantes de u.*

A Não é o que pretendo. Por isso te disse que este problema é de grande importância tanto para o estudo das sucessões como para o nosso conhecimento dos números reais.

B Estou a ficar confundido. Se também não pretendes que eu prove (1)... então, não sei o que queres.

A Olha, vamos fazer aqui uma pausa.

B Já?

A Sim, porque penso que é bom releres os parágrafos 4 e 5 do capítulo dos números reais. Do primeiro, podes limitar-te a uma leitura rápida, mas dedica especial atenção à proposição 4.2 — que afirma que, entre dois reais distintos, existem infinitos números irracionais — (e também à proposição 3.2 do parágrafo 3 — que afirma que, entre dois reais distintos, existem infinitos números racionais). Do segundo faz uma leitura cuidada.

A Fizeste o que te pedi?

B Fiz.

A E, em geral, o que é que tens para me dizer?

B No primeiro dos parágrafos que me pediste para reler, a introdução dos números reais fica incompleta, porque os problemas levantados são de tal ordem que se optou por escolher uma outra via para a sua introdução. Essa outra via, que consiste numa teoria axiomática, ficou, igualmente, incompleta, mas, do que li, parece-me que apenas lhe falta um axioma para a podermos considerar terminada. Ora, esse axioma, que exprimirá uma propriedade verdadeira apenas para os irracionais, será introduzido neste nosso parágrafo. Concluí daqui e da nossa conversa anterior, que esse axioma deve ser determinante para a questão (1) que me preocupava. Se isto for verdade, compreendo, então, que não me pudesses pedir uma demonstração de (1), porque à teoria axiomática ainda faltava um axioma que presumo ser decisivo na referida demonstração. Agora, o que diz o tal axioma é que não sei.

A Foi um bom resumo dos dois parágrafos que te pedi para reler, e a conclusão a que chegaste está certa. Não te vou dizer o axioma que falta, mas vou-te propor que me demonstres, utilizando apenas o primeiro parágrafo que releste, a seguinte proposição:

2. *Existe uma sucessão de termos* racionais *crescente e convergente para* $\sqrt{2}$.

Dou-te uma sugestão: utiliza a proposição 3.2 do capítulo dos números reais.

B Ora, essa proposição diz-me que, entre dois reais distintos, existem infinitos números racionais. E é à custa deste resultado que queres que eu prove (2)?

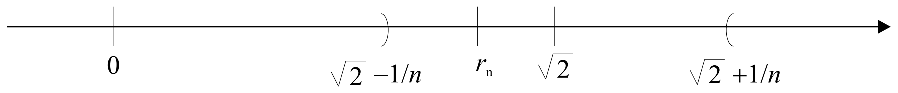
A Sim.

B Curiosamente, em vez de, dada uma sucessão, me pedires que eu prove que o seu limite é um determinado número real, o que pretendes, agora, é que, dado um número real, neste caso $\sqrt{2}$, eu encontre uma sucessão que convirja para ele. E não uma sucessão qualquer — ela tem de ser crescente e de termos racionais.

A É esse o problema.

B Encontrar uma sucessão que tenda para $\sqrt{2}$ é fácil — basta tomar a sucessão constante $u_n = \sqrt{2}$ para todo o n natural, mas esta, se bem que crescente, não tem termos racionais. Vou, então, recorrer à definição de limite usando vizinhanças de $\sqrt{2}$ com raios cada vez mais pequenos e tendentes para zero, por exemplo, vizinhanças da forma $V_{\frac{1}{n}}(\sqrt{2})$ e escolher, em cada uma delas, um número racional r_n, o que posso sempre fazer, uma vez que, no intervalo $\left]\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2}\right[$ existem (proposição 3.2 do capítulo dos números reais) infinitos racionais.

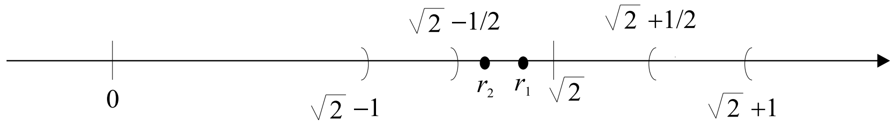
Obtivemos, assim, uma sucessão r_n de números racionais que se prova, sem dificuldade, tender para $\sqrt{2}$.



A E como garantes que a sucessão r_n é crescente?

B Repara que tive o cuidado de escolher r_n no intervalo $\left]\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2}\right[$.

A Mas isso não te garante que a sucessão r_n seja crescente. Considera a seguinte figura:



Supõe que na $V_1(\sqrt{2})$ escolheste o ponto r_1 e que na vizinhança $V_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2})$ a tua escolha foi o ponto r_2. Como $r_2 < r_1$, a tua sucessão não é crescente.

B Tens razão. Mas, penso que isso se resolve sem dificuldade. Basta escolher um racional r_1 no intervalo $\left]\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-\frac{1}{2}\right[$, um racional r_2 no intervalo $\left]\sqrt{2}-\frac{1}{2}, \sqrt{2}-\frac{1}{3}\right[$ e assim sucessivamente. Antes que me digas que ainda não defini a sucessão, acrescento (o que resolve o problema) que, para cada $n \in \mathbb{N}$, escolho um racional r_n no intervalo $\left]\sqrt{2}-\frac{1}{n}, \sqrt{2}-\frac{1}{n+1}\right[$.

A Acabaste de demonstrar (2). Diz-me, agora, se, em vez de $\sqrt{2}$, a questão (2) fosse posta para π, poderias dar-me imediatamente a resposta?

B Claro que posso. Na demonstração que fiz é irrelevante teres-me dado $\sqrt{2}$, ou π, ou mesmo qualquer número irracional. Se me tivesses dado um racional a, a prova até era trivial — bastava tomar a sucessão r constante, com todos os termos iguais a a.

A Concluis, assim, que, dado um qualquer número irracional α existe sempre uma sucessão crescente de números racionais convergente para α.

B Sim.

A Supõe agora que, em vez de estarmos a estudar os números reais, estávamos, apenas, a fazer um estudo dos números racionais. Neste novo quadro seria verdadeiro o Teorema das sucessões monótonas e limitadas?

B Claro que não! Se o nosso universo fosse o dos números racionais, uma sucessão crescente e majorada como aquela que encontrei e que convergia para $\sqrt{2}$, não teria limite.

A Assim, o enunciado do Teorema das sucessões monótonas e limitadas é uma proposição verdadeira no conjunto dos números reais, mas falsa no conjunto dos números racionais.

Pergunto-te, agora: poderias ter demonstrado este teorema utilizando apenas os axiomas 1 a 14 do segundo parágrafo que releste?

B Acho que não... porque os axiomas 1 a 14 também são verdadeiros para os números racionais e, portanto, tudo o que se deduza deles tem, igualmente, de ser verdadeiro para os números racionais.

A Então?...

B Então o quê?... Espera... parece-me que já sei onde queres chegar. Só faltava um axioma à Teoria axiomática dos números reais e esse axioma devia ser uma propriedade dos números reais que fosse falsa no quadro dos números racionais... Assim, o axioma que faltava bem podia ser o enunciado do Teorema das sucessões monótonas e limitadas... ou, melhor, o Teorema 3

3. *Toda a sucessão de termos reais, crescente e majorada é convergente.*

uma vez que a propriedade semelhante, relativa às sucessões decrescentes, se deve demonstrar, sem dificuldade, desta... É um caso a considerar...

A ...

B Não! Não me parece natural.

A Porquê?!

B Não sei se esta proposição é... desculpa a expressão, suficientemente potente para, à custa dela (e, evidentemente, dos outros axiomas) demonstrar tudo o que pretendemos dos números reais. Mas não é esta a minha objecção, que não é de natureza científica mas... vais-te rir... estética.

A Não me rio. Estou cada vez mais interessado no que me estás a dizer.

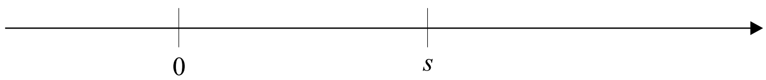
B Supõe que admitias (3) como axioma. Antes de o fazeres tinhas que definir sucessão, limite de uma sucessão, sucessão crescente, sucessão majorada e, só depois, é que podias introduzir (3) como axioma. Acresce a isto que, entretanto, não poderias demonstrar nada que apenas fosse verdadeiro para os números irracionais. Terias então que voltar atrás e demonstrar o que te faltava. Não achas o caminho tortuoso? Não achas que é desejável numa teoria matemática, uma certa fluência, uma certa elegância na obtenção dos resultados?

A Estou plenamente de acordo contigo, embora, por vezes, o que é desejável nem sempre seja possível. Como sobre o aspecto científico não me vou pronunciar, e, estando nós de acordo sobre a parte estética, vejamos como podemos resolver a questão dos números reais, sem recorrer às sucessões, mas tendo em conta o que até agora fizemos.

Considera, de novo, a proposição (3). O limite da tua sucessão crescente e majorada é...

B É o menor dos majorantes.

A Designemos esse número por s e marquêmo-lo na recta real:



Nota que esse número estabelece um corte na recta real. À direita dele, ou seja, na semi-recta $\{x \in \mathbb{R};\ x > s\}$, só estão majorantes da sucessão e à esquerda de s, ou seja, na semi-recta $\{x \in \mathbb{R};\ x < s\}$, não se encontra nenhum majorante da sucessão. O ponto s, que determina o corte, é o menor dos majorantes.

Ora, se em vez de uma sucessão, eu te tivesse dado um conjunto majorado...

B Espera... eu sei o que é uma sucessão majorada... agora um conjunto majorado?!...

A Estás com atenção e com espírito crítico, o que me deixa satisfeito. Mas estou certo de que és capaz de me dar uma boa definição de conjunto majorado.

B Essas tuas certezas?!... Bem... deixa-me ver... uma sucessão diz-se majorada se tiver um majorante e um majorante de uma sucessão é um número real que é maior ou igual a todos os termos da sucessão. Assim... se A for um subconjunto de $\mathbb{R}$ e α for um número real, eu vou dizer que α é um majorante de A sse... sse α for maior ou igual a todos os elementos de A.

A Muito bem! Formaliza.

B Sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$, diz-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ é um majorante de A sse

$$\forall_{x \in A} \quad x \leq \alpha. \tag{12}$$

Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ diz-se majorado sse tiver um majorante, ou seja, $A \subset \mathbb{R}$ é majorado sse

$$\exists_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{x \in A} \quad x \leq \alpha.$$

Claro que, tal como acontecia com as sucessões, se A for majorado, A tem infinitos majorantes.

A Disseste "tal como acontecia com as sucessões", o que me leva a pensar que consideras a noção de majorante de uma sucessão, um caso particular da noção de majorante de um subconjunto de $\mathbb{R}$. É isso?

B Foi mais uma analogia do que outra coisa qualquer. Mas... vendo bem... acho que tens razão. Com efeito, um majorante de uma sucessão é, precisamente, um majorante do conjunto de termos da sucessão.

A Recorda, agora, o que te disse sobre os cortes na recta real, e relembra o que necessitas para provar o Teorema das sucessões crescentes e majoradas. Serás capaz de encontrar uma proposição, onde não intervenha a noção de sucessão, que distinga os números reais dos números racionais?

B Eu escolheria a proposição seguinte:

4. *Para todo o subconjunto majorado de* $\mathbb{R}$*, existe o menor dos majorantes.*

A Excelente!

B É, então, este o axioma que faltava para completar a Teoria axiomática dos números reais?

A Não disse tanto... estamos perto, mesmo muito perto, mas não nos devemos apressar. Vou, antes, dar a seguinte definição:

sendo A um subconjunto majorado de $\mathbb{R}$, diz-se que $s \in \mathbb{R}$ é o supremo de A, e escreve-se $s = \sup A$, sse s é o menor dos majorantes de A.

B Assim, a minha proposição (4) pode ser escrita na forma

5. *Todo o subconjunto majorado de* $\mathbb{R}$ *tem supremo.*

A É verdade, embora tenhas que ter cuidado com a palavra "tem". Dizes que todo o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ *tem* supremo, no sentido em que *existe* supremo, para todo o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ majorado, e não no sentido em que o supremo de A pertence a A. De uma forma imprecisa, o significado de "tem" nesta frase, está relacionado com o de "existir" e não com o de "pertencer".

B Para mim isso é claro. Por exemplo, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R};\ x < 2\}$ tem por conjunto dos majorantes o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 2\},$$

pelo que o menor dos majorantes é o número 2, que não pertence a A. Digo que A tem supremo porque existe o menor dos majorantes de A, mas com isso não quero dizer que o supremo pertença a A.

A Apenas te fiz esta observação porque as proposições escritas em linguagem não formalizada, dão, por vezes, azo a diversas interpretações. Não foi o caso. Ainda bem.

Quero, agora, fazer-te uma pergunta, para esclarecermos, de uma vez por todas, as relações que existem entre a proposição (3) e a proposição (5), candidata a axioma dos números reais:

Por que razão, na proposição (3), supões que a sucessão é crescente uma vez que, sendo majorada, já garantiste a existência de supremo (ou seja, do menor dos majorantes)?

B A resposta é fácil. O facto de a sucessão ser majorada garante-me, efectivamente, a existência de supremo, que é um candidato a limite. Mas, sem mais hipóteses sobre a sucessão, eu não posso garantir que ela seja convergente — basta considerar a sucessão u, definida por

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad u_n = (-1)^n.$$

O conjunto de termos de u é

$$\{-1, 1\},$$

pelo que o menor dos seus majorantes é o número real 1. Ora 1 não é limite de u, uma vez que u nem sequer é convergente.

A hipótese de crescimento, para além da de majoração, é que nos permite provar a convergência da sucessão. A proposição (5), candidata a axioma, como disseste, apenas nos dá um candidato a limite.

A Gostei da tua resposta. Vamos fazer, aqui, uma pausa. . .

B Agora? Não me faças isso! Disseste que estou muito perto de encontrar o enunciado do último axioma da Teoria dos números reais. . . e, depois, decides-te por uma pausa. Francamente! Pelo menos, dá-me algo em que pensar. . . algo mais preciso do que estar perto de. . .

A Nem todo o subconjunto majorado de $\mathbb{R}$ tem supremo! Há um, e apenas um, que não tem.

B E perdi todo o meu tempo com o conjunto vazio!

A O conjunto vazio é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

B Pois. . .

A Diz-me o que descobriste sobre o conjunto vazio.

B Que ele é majorado!

A Como chegaste a essa conclusão?

B Não me foi fácil, porque não me sinto à vontade quando penso no conjunto vazio.

A Mas provaste que ele é majorado. Como?

B Depois de dito, tudo parece ser simples, mas levei muito tempo até descobrir que qualquer número real é majorante do conjunto vazio. Fiz a prova por redução ao absurdo: supõe que $\alpha \in \mathbb{R}$ não é majorante de $\varnothing$, então o número α tem de satisfazer à negação de (12), ou seja, a

$$\exists_{x\in\varnothing} \quad x > \alpha$$

que é manifestamente falso, porque o conjunto vazio não tem elementos. Assim é falso que $\alpha \in \mathbb{R}$ não é majorante do vazio, donde se conclui que α é majorante do conjunto vazio.

A O conjunto dos majorantes do conjunto vazio é então. . .

B $\mathbb{R}$.

A Assim...

B O conjunto vazio é majorado e não tem supremo, porque não existe o menor dos números reais.

A Estás, agora, em condição de enunciares o último axioma da Teoria dos números reais, ao qual damos o nome de Axioma do supremo.

B Penso que é a proposição seguinte:

> **Axioma** (do supremo). *Todo o subconjunto de* $\mathbb{R}$ *majorado e não vazio tem supremo.*

A E disseste tu que tinhas perdido muito tempo... em assuntos como este, o tempo não se perde!

B Chegámos ao fim, não foi?

A Sim.

B Ainda bem! Posso dormir descansado.

A Vamos, então, dar por encerrada a conversa.

B Espera!... ainda te queria fazer algumas perguntas...

A Quais?

B São várias... de uma forma geral, o que gostaria de ver era a resposta que a teoria axiomática dá às questões não resolvidas pela via geométrica. Por exemplo, como se define $\sqrt[3]{2}$, e e π? E, já agora, por que não perguntar como se define $\sqrt[k]{a}$ (onde $k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}^+$)?

Há tantas perguntas que gostaria de fazer...

A Continua...

B Olha, por exemplo, as demonstrações que fizemos sobre a boa distribuição na recta real dos números racionais e dos números irracionais e de muitos outros números, foram feitas pela via geométrica. Como é que essas proposições se demonstram recorrendo à via axiomática?

A E ainda há uma pergunta fundamental que não fizeste!

B Qual?

A Introduzimos axiomaticamente os números reais... Não foi?

B Sim.

A Portanto, só sabemos, dos números reais, o que nos dizem os símbolos primitivos e os axiomas e o que dos primeiros se pode deduzir e dos segundos se pode demonstrar

B Quem escolhe essa via, é assim que tem de pensar.

A Supõe que a escolheste. Diz-me agora: como defines o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais?

B O conjunto dos números naturais!?

A $\mathbb{N}$ não é um símbolo primitivo, pois não?

B Não...

A Então tens que o definir!

B Mas assim volto ao princípio...

A Estás enganado. No princípio só tínhamos intuições sobre os números e uma representação geométrica que nunca foi fundamentada. Agora temos uma *Teoria axiomática dos números reais.*

B Sabes... estou-me a recordar de uma passagem que li no capítulo dos números reais...

A Que era?

B Já foi há muito tempo... e não me lembro bem do que dizia. Mas era, mais ou menos isto:

Temos duas escolhas para fundamentar os reais: uma consiste na fundamentação dos números naturais, construindo-se os outros números à custa destes; a outra escolhe a fundamentação directa dos números reais.

Nesta última via os naturais têm, efectivamente, de ser definidos.

A E a definição não é difícil, mas algumas (poucas) propriedades de $\mathbb{N}$ têm de ser demonstradas. Ora, essas propriedades intervêm em muitas das questões que me puseste.

B Por que queres parar aqui?

A Acho que é aqui que a nossa conversa deve terminar, porque
cada coisa, a seu tempo, tem seu tempo[2]

[2]Primeiro verso de uma *Ode* de Ricardo Reis.