Opções financeiras

Modelos em tempo discreto e contínuo

Cláudia Duarte
ISEG-UTL
claudia_maeg@sapo.pt

Sumário

- Opções financeiras
- Diagramas de *Payoff*
- Sinopse histórica
- Objectivos dos modelos matemáticos
- Modelo discreto - Binomial
- Modelo contínuo - Black-Scholes
- Interdependência disciplinar

O que são opções?

- Contratos que conferem ao seu detentor o direito de compra/venda do activo subjacente, por um dado preço pré-determinado e tendo em conta uma dada data

- São produtos derivados, i.e., dependem do valor do activo de risco subjacente, sendo transaccionados nos mercados financeiros

Intervenientes

- *Holder*
  - comprador/detentor da opção de venda/compra
- *Writer/Seller*
  - vendedor da opção

Tipos de opções

- *Calls*
  - Se a opção incide sobre a compra de um activo
  - Transaccionadas pela primeira vez em 1973
- *Puts*
  - Se a opção se refere à venda de um activo
  - Transaccionadas a partir de 1977
- Em Portugal, negociaram-se pela primeira vez em 1999

Tipos de opções

- Europeias
  - Se o direito de compra/venda só pode ser exercido no fim do contrato (maturidade)
- Americanas
  - Se o direito de compra/venda pode ser exercido até à maturidade

Finalidade das opções

- Têm como objectivo transferir o risco do comprador (direito) para o vendedor (obrigação)

- Porém, os direitos nos mercados financeiros têm um custo: o prémio, que é pago pelo *holder* ao *writer*

Outros conceitos

- Arbitragem
  - Garantir um *payoff* positivo no futuro com risco muito reduzido ou nulo
- *Short-selling* / venda a descoberto
  - vender um activo sem o deter / pedir emprestado
- *Risk neutral world*
  - Os preços dos activos evoluem de acordo com a taxa de juro do período correspondente

Objectivo dos modelos

- Obter resposta para as seguintes questões:
  - *Pricing*
    - qual o preço adequado para a opção, i.e., o preço justo do prémio?
  - *Hedging* / cobertura do risco
    - como é que o *writer* se pode defender do risco que assume?

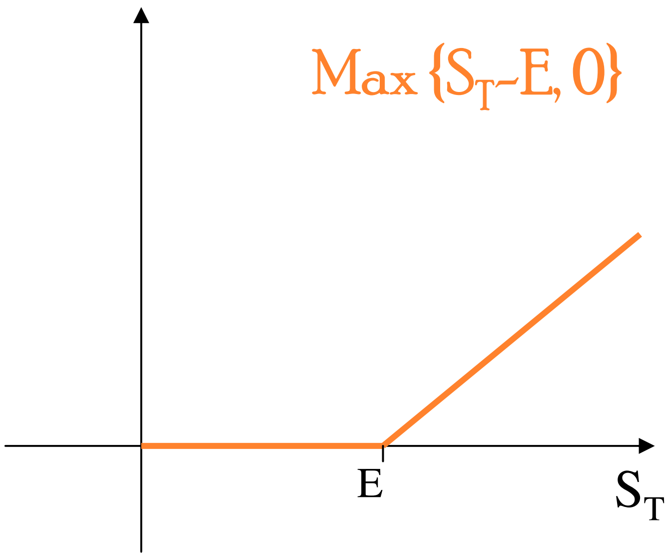
Notação

- S_t: valor do activo subjacente no instante t
- T: maturidade
- E: preço de exercício
- V_0: valor da opção na data do contrato (prémio)

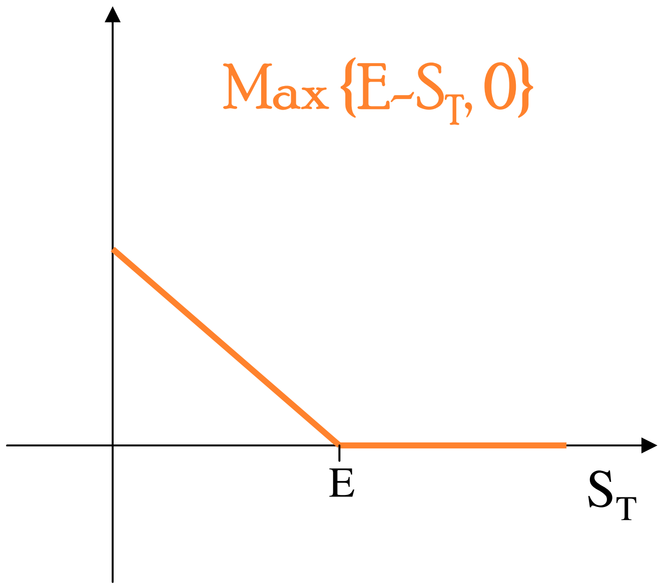
- Ganhos do *holder* (*payoffs* na maturidade):
  - Na *call*: $C(S,T) = \text{Max}\,\{S_T - E, 0\}$
  - Na *put*: $P(S,T) = \text{Max}\,\{E - S_T, 0\}$

- *O payoff* do *writer* é o simétrico do *payoff* do *holder*

Diagramas de *payoff* - *Holder*

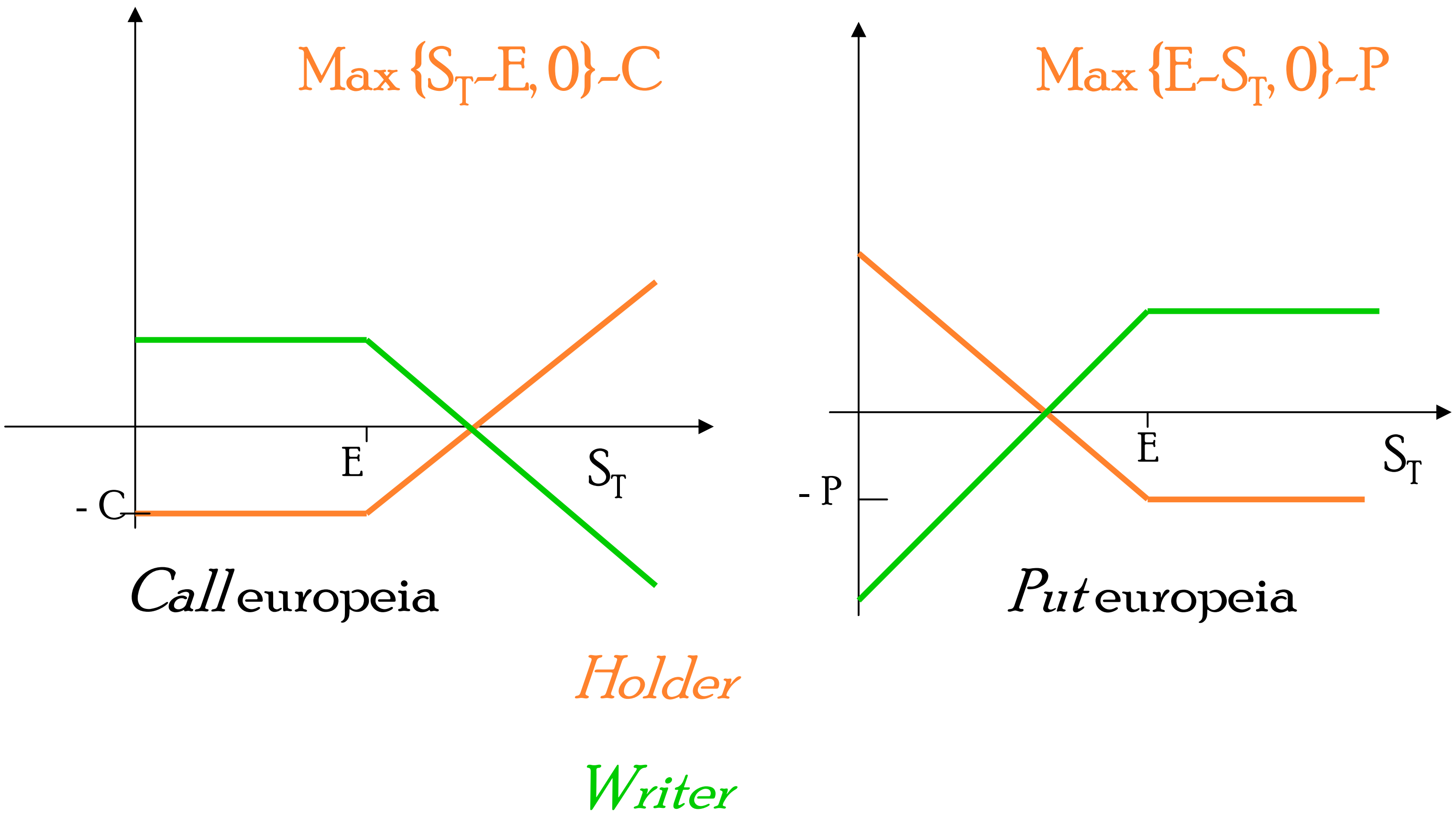


Call europeia



Put europeia

Diagramas de *payoff* – c/prémios



Sinopse histórica

- Bachelier - *Théorie de la Spéculation -1900*
- Samuelson - Movimento Browniano Geométrico - 1950
- Black, Scholes e Merton - equação Black-Scholes - 1960/1970
- Cox, Ross e Rubinstein - modelo discreto
- Kolmogorov, Itô, Wiener... - cálculo estocástico

Modelos

- em tempo discreto
  - Modelo binomial
    - Árvore binomial

- em tempo contínuo
  - Modelo de Black-Scholes
    - Equação de Black-Scholes

Modelo Binomial

- Seja T a maturidade de uma opção
- Dividir o intervalo temporal [0,T] em M subintervalos de comprimento $\delta = \frac{T}{M}$, logo $t_m = m \times \delta \quad (t_0=0)$
- Assumir a hipótese de que só existem duas possibilidades:
  - O valor do activo sobe:
    - $S_{m+1}=u \times S_m \; (u>1)$, com probabilidade p
  - Ou então desce:
    - $S_{m+1}=d \times S_m \; (d<1)$, com probabilidade (1-p)

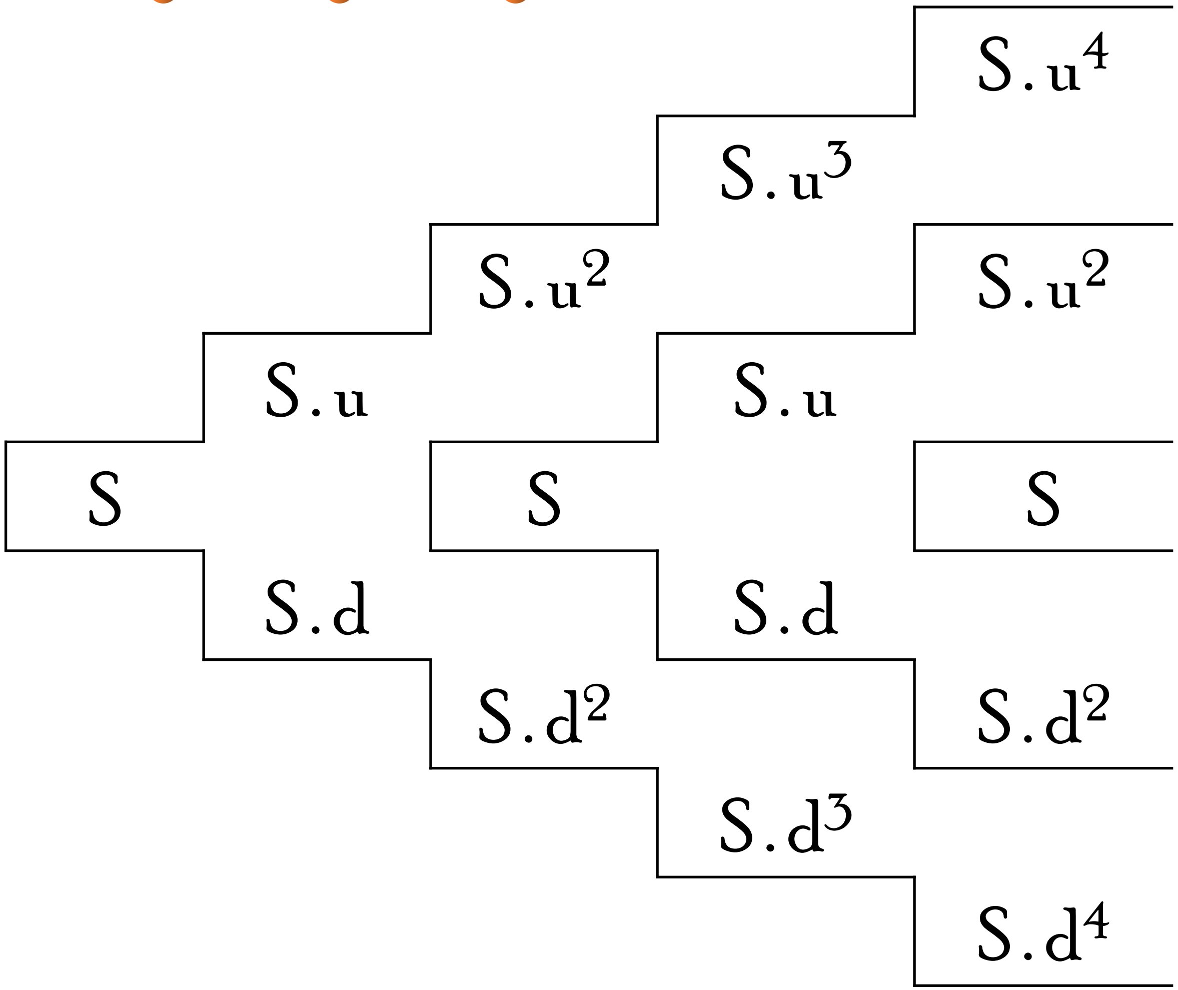
Cox, Ross e Rubinstein

- Hipótese de Cox, Ross e Rubinstein: $d = \dfrac{1}{u}$

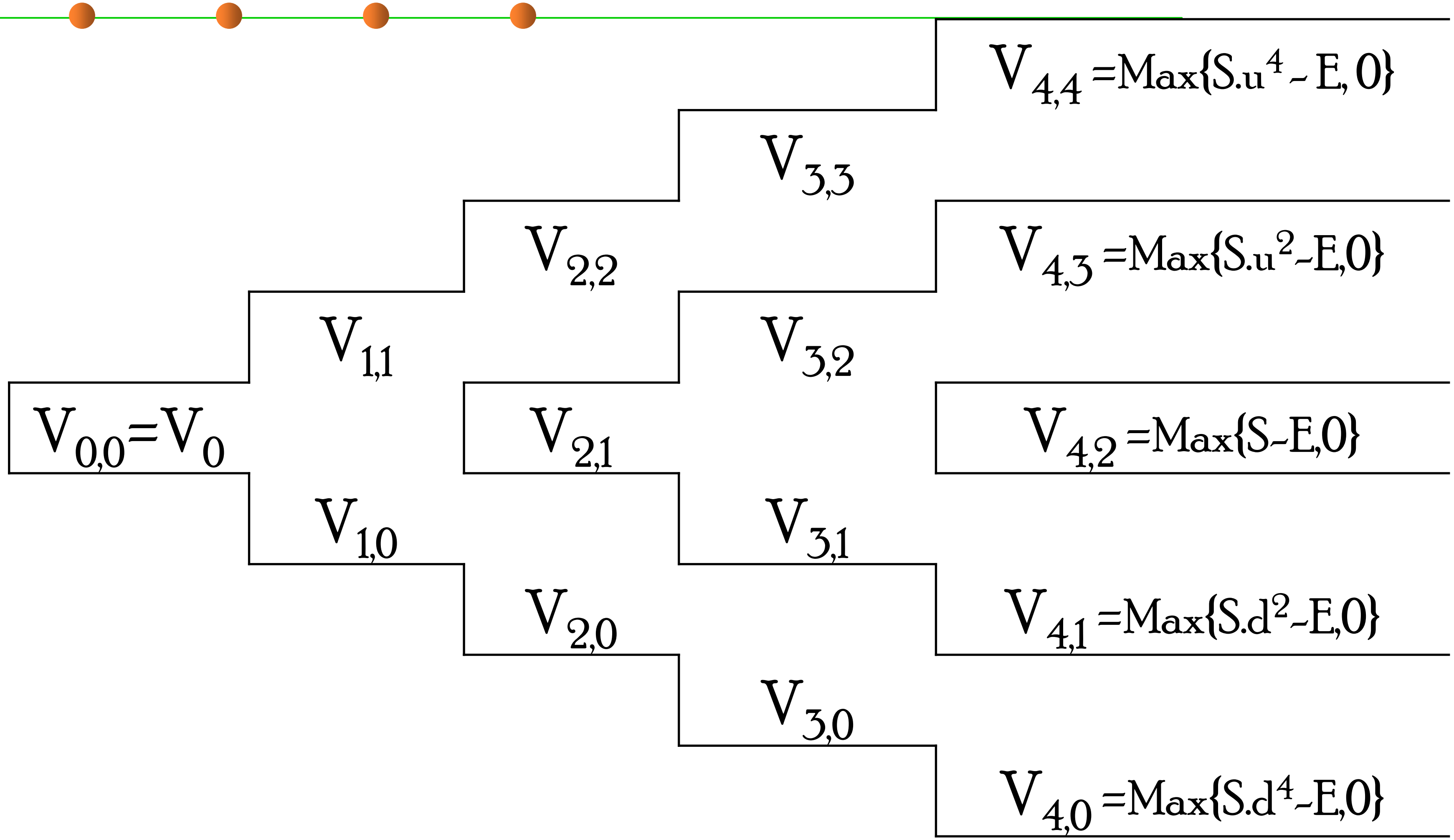
- Nestas condições, o valor do activo ao fim de m períodos, com j crescimentos, é dado por:

$$S_{m,j} = S \cdot u^{j} \cdot d^{m-j} = S \cdot u^{2j-m}, \ \mathrm{j} = 0,1,\ldots,\mathrm{m}$$

Árvore binomial (m=4)



Árvore de *payoffs* – *Call europeia*



Cálculo do prémio

- Procedimento :
  - Recuar desde a última coluna até chegar à primeira, onde $V_{0,0}$ corresponde precisamente ao valor justo do prémio

- Para deduzir os parâmetros d, u e p, considerar :
  - σ a volatilidade do activo (uma medida de risco)
  - $S_{m,j} \cdot e^{r.\delta} = p \cdot S_{m+1,j+1} + (1-p) \cdot S_{m+1,j}$
    - r – taxa de juro sem risco
    - $e^{r.\delta}$– valor actual de um capital unitário que vence decorrido o tempo δ (juro composto contínuo)

Valores dos parâmetros

- $$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}}$$
- $$u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}$$
- $$p = \frac{e^{r\delta} - d}{u - d}$$

p: probabilidade neutra face ao risco

Hedging - Replicação

- O *writer* suporta o risco do *holder*, recebendo para isso o prémio, como vimos anteriormente
- Mas o *writer* pode tentar gerir esse risco, investindo nos activos sobre os quais incide a opção (replicação do *portfolio*)
- Prova-se que o *share* óptimo de acções (Δ) para uma *call* europeia é dado por

$$\Delta = \frac{Su - E}{S(u-d)}$$

Caso discreto – Put americana

- O *holder* irá exercer a opção quando tiver possibilidade de realizar um lucro superior à remuneração da taxa de juro sem risco:
  - $E-S_t > V_{0,0} \cdot e^{r.\delta}$, sendo $V_{0,0}$ o prémio justo
  - $P_{m,j} = \max\{e^{-r\delta}(p.P_{m+1,j} + (1-p)\, P_{m+1,j+1}), E-S_{m,j}\}$
  - Prova-se que a call americana deve ser exercida o mais tarde possível (maturidade), recaindo no caso da call europeia

Modelos a tempo contínuo

- Modelo de Bachelier
  - Equação diferencial estocástica (equação integral) que descreve o preço dos activos é
    - $dS_t = \mu . dt + \sigma . dW_t$, σ é a volatilidade do activo
  - A solução respectiva é o movimento browniano com deriva / processo estocástico de Wiener
    - $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$, $t \leq T$

$$S_t = S_0 + \underbrace{\int_0^t \mu \, ds}_{\text{Integral de Riemann}} + \underbrace{\int_0^t \sigma dW_s}_{\text{Integral de Itô}}$$

Samuelson sugere

- O preço dos activos pode ser escrito na forma diferencial como
  - $dS_t = S_t (\mu \, dt + \sigma \, dWt)$
  - A solução corresponde ao movimento browniano geométrico (pelo integral de Itô)
    - $$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$$

Modelo de *Black-Scholes*

- Equação determinística fundamental *calls* europeias

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

- Condições:
  - $C(T,S) = \max(S-E, 0)$ condição final
  - $C(t,0) = 0$ condição financeira
  - $C(t,S) \sim S$ quando $S \longrightarrow \infty$ condição assimptótica, no sentido de

$$\lim_{S\to\infty} \frac{C(t,S)}{S} = 1$$

Solução explícita

- A solução explícita é determinada usando métodos de equações diferenciais parciais
  - duas mudanças de variável até se transformar num problema de equação do calor, $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

com $u=u(x,\tau)$ e com as condições respectivas

  - a solução vem

$$C(S,t) = S_t \Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{E} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - Ee^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{E} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$$

Put americana – caso contínuo

- Problema de fronteira livre
- Fazendo transformações até chegar à equação do calor
- Soluções numéricas

Análise numérica e computação no estudo das opções americanas!

Matemática Financeira

Área multidisciplinar

- Estatística
- Probabilidades
- Cálculo estocástico
- Análise Numérica
- Computação
- Equações Diferenciais
- Análise Convexa
- ...

Bibliografia

- Willmot, P., Dewynne, J. & Howison, S. "Option Pricing –Mathematical models and computation", Oxford Financial Press, 1993, sixth edition. (last reprint 2006)
- Hull, J. "Options, Futures and Other Derivatives", Prentice Hall, 5th edition 2003
- Ross, S. M. "An elementary introduction to Mathematical Finance", Cambridge University Press, 2nd edition 2003
- Alves, A. S. "Simulação discreta do valor de uma opção"
- http://www.mat.uc.pt/~asalves/nemo/discreto-17.PDF
- http://pascal.iseg.utl.pt/~matfin/publicar/MathFin_MRGrossinho_3.pdf
- Grossinho, M. R. "Métodos Numéricos em Finanças“
- http://pascal.iseg.utl.pt/~matfin/publicar/Posgrad/Posgraduaccao.htm