Integral de Feynman
João Meireles

3º Ano da Licenciatura em Matemática
Universidade de Lisboa
Setembro 2009

Experiência de Double-Slit

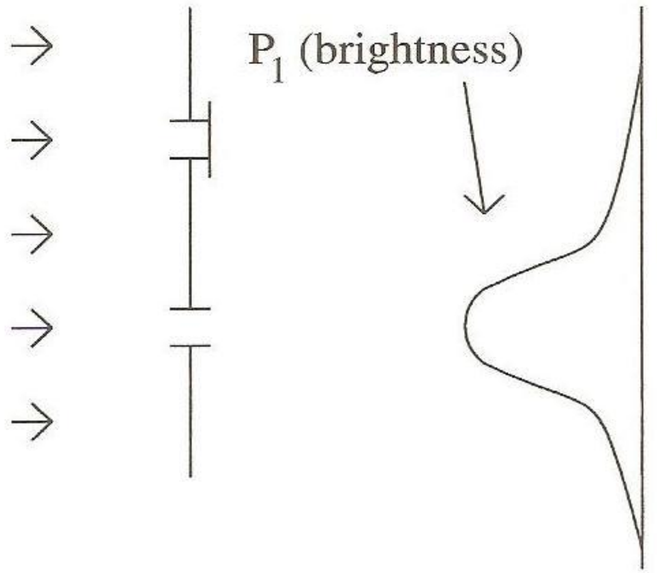


Fig.1.2. First slit blocked.

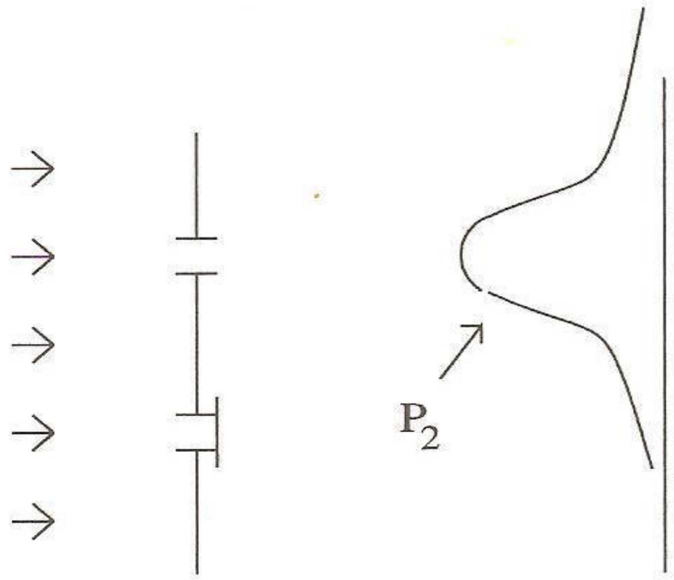


Fig.1.3. Second slit blocked.

Introdução- Experiência de Double-Slit

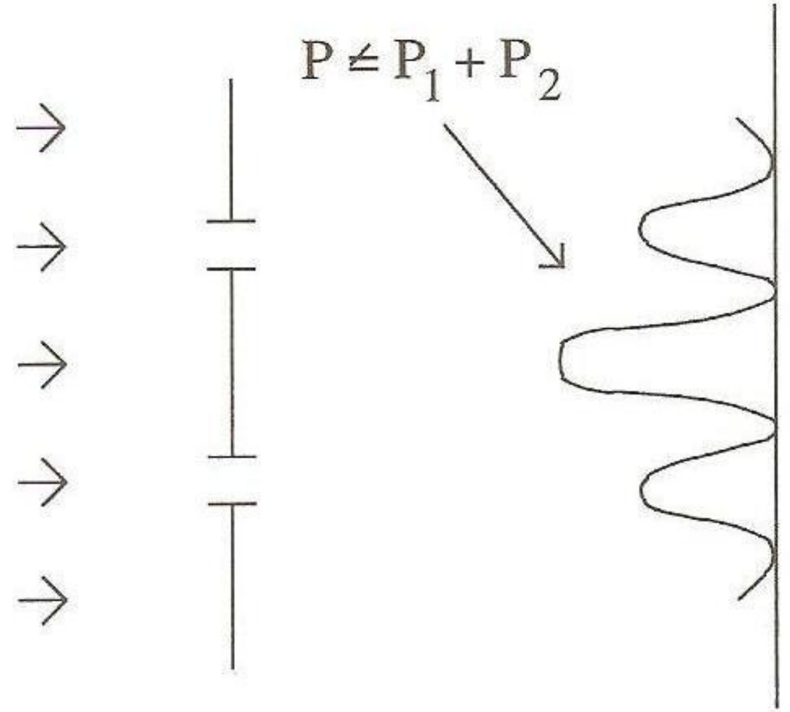


Fig.1.4. Both slits open.

Introdução - Experiência de Double-Slit

Incrivelmente tem-se $P \neq P_1 + P_2$!

Com base nesta experiência fazemos as seguintes observações:

1. Não podemos predizer exactamente onde um dado electrão irá embater no ecrã;

Incrivelmente tem-se $P \neq P_1 + P_2$!

<u>Com base nesta experiência fazemos as seguintes observações:</u>

1. Não podemos predizer exactamente onde um dado electrão irá embater no ecrã;

2. O padrão de intensidade (chamado *padrão de interferência*) que é observado quando as duas aberturas são mantidas abertas, é similar ao padrão observado quando duas ondas E_1 e E_2 se sobrepõem, cada uma emitida a partir da sua respectiva abertura.

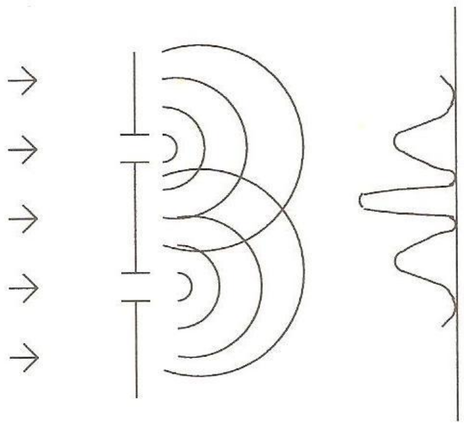


Fig.1.5. Wave interference.

Introdução - Experiência de Double-Slit

Com base nas observações anteriores podemos concluir:

1. O e^- comporta-se de maneira aleatória;

Introdução - Experiência de Double-Slit

Com base nas observações anteriores podemos concluir:

1. O e^- comporta-se de maneira aleatória;

2. O e^- apresenta propriedades de onda.

Funções Onda

Em Mecânica Quântica, o estado de uma partícula é descrito por uma função da posição e do tempo que toma valores complexos,

$$\boldsymbol{\varphi}(x,t),\ x \in \mathbb{R}^3\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Uma tal função é chamada *função onda*.

Double-Slit $\Rightarrow$

1. $|\varphi(.,t)|^2$ é a densidade de probabilidade da posição da partícula. Isto é, a probabilidade de uma partícula estar numa região $\Omega \subseteq R^3$ no instante t é $\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2 dx$.

Requeremos $\int_{R^3} |\varphi(x,t)|^2 dx = 1$ (Conservação de Probabilidade).

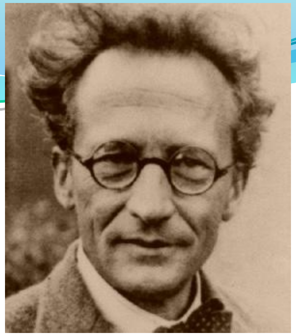
Espaço de funções onda

O espaço de todos os possíveis estados de uma partícula num dado intervalo de tempo é designado por *espaço de estados* ou *espaço de funções onda*.

No nosso caso o espaço de funções onda é o espaço vectorial

$$L^2(\mathbb{R}^3) := \{\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx < \infty\}$$

Equação de Schrödinger



1887-1961

<u>Motivações físicas</u>:

1. O estado de uma dada partícula ψ no instante $t=t_o$, deve determinar o estado dessa mesma partícula para todo o instante ("Causalidade");

<u>Motivações físicas</u>:

Double-Slit $\Rightarrow$

2. Se ψ e ϕ forem dois estados de evolução, então $\alpha\psi+\beta\phi$ também o é (“Sobreposição”);

Motivações físicas:

3. Quando uma partícula tem uma massa *m* muito grande, a M.Q deve reduzir-se à M.C. (“Correspondência”).

A causalidade ⇒ ψ deve satisfazer uma equação de 1ª ordem em relação ao tempo, $\frac{\partial}{\partial t}\psi = A\psi$ onde A é algum operador no espaço L^2.

A causalidade ⇒ ψ deve satisfazer uma equação de 1ª ordem em relação ao tempo, $\frac{\partial}{\partial t}\psi = A\psi$ onde A é algum operador no espaço L^2.

A sobreposição ⇒ que *A* deve ser operador <u>linear</u>.

A causalidade ⇒ ψ deve satisfazer uma equação de 1ª ordem em relação ao tempo, $\frac{\partial}{\partial t}\psi = A\psi$ onde A é algum operador no espaço L^2.

A sobreposição ⇒ que *A* deve ser operador <u>linear</u>.

Princípio da Correspondência

Introdução – Mecânica Ondulatória

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi}$$

com

$$\boxed{H\psi := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi}$$

H = operador de Schrödinger,

V = potencial,

$\Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2$,

m = massa,

$\hbar$ é a constante de Planck.

Dinâmica

Vimos que o conhecimento da evolução de uma partícula (dada por ψ) de massa m e sujeita a um potencial V, é dada pela equação de Schrödinger

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi}$$

com $$\boxed{H\psi := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi}\ .$$

$\psi\,|_{t=0} = \psi_0$ ($\psi_0 \in L^2$) é um problema de Cauchy.

Propriedade auto-adjunta

(A *adjunta* de um operador *A* num espaço de Hilbert *H*, é o operador *A** satisfazendo

$$\langle A^*\psi, \phi\rangle = \langle \psi, A\phi\rangle$$

para todo $\phi \in D(A)$ (denso) e para $\psi \in D(A^*)$.

O operador *A* diz-se *auto-adjunto* se $A=A^*$)

Propriedade auto-adjunta

(A *adjunta* de um operador A num espaço de Hilbert H, é o operador A^* satisfazendo

$$\langle A^*\psi, \phi\rangle = \langle \psi, A\phi\rangle$$

para todo $\phi \in D(A)$ (denso) e para $\psi \in D(A^*)$.

O operador A diz-se *auto-adjunto* se A=A^*)

Propriedade simétrica (mais fraca que auto-adjunta!)

($\langle A\psi, \phi\rangle = \langle \psi, A\phi\rangle$, para quaisquer ψ, $\phi \in D(A)$)

Definição (Operador limitado): Um operador A num espaço de Hilbert H é limitado se

$$\|A\| := \sup_{\{\varphi \in H:\, \|\varphi\| = 1\}} \|A\varphi\| < \infty$$

<u>Proposição</u>: Se A é operador **limitado**, então

$$A \text{ simétrico} \Rightarrow A \text{ auto-adjunto}$$

Mas,

A não limitado e simétrico $\nRightarrow$ A auto-adjunto

Por exemplo, $A = -\Delta - \frac{c}{|x|^2}, \quad c > 1/4$.

Teorema

Se ψ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \\ \psi\,\big|_{t=0} = \psi_0 \end{cases},$$

então

ψ conserva probabilidade <u>se e só se</u> H é simétrico.

Existência de Dinâmica

Definição: dizemos que *existe dinâmica* se o problema

de Cauchy

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \\ \psi \,\big|_{t=0} = \psi_0 \end{cases}$$

tem uma única solução que conserva a probabilidade.

Teorema:

A dinâmica existe se e só se H é auto-adjunto e

$$\psi = e^{-itH/\hbar}\psi_0$$

Teorema:

A dinâmica existe <u>se e só se</u> *H* é auto-adjunto e

$$\psi = e^{-itH/\hbar}\psi_0$$

$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ é unitário e verifica a propriedade de grupo

$$U(t)U(s)=U(t+s)$$

(chamamos a *U(t)* de *propagador* ou de *operador de evolução*).

H auto-adjunto $\Rightarrow$ **existe dinâmica e a única solução de** $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ **com** $\psi\big|_{t=o} = \psi_o$ **conserva a probabilidade.**

Para que a formulação da equação de Schrödinger na mecânica quântica faça sentido, o operador de Schrödinger tem de ser auto-adjunto. (A simetria não chega)

Operadores Integrais

Definição (Operadores integrais): Um operador integral é um operador $\mathcal{K}$ tal que

$$(\mathcal{K}\psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)\psi(y)dy$$

K =“*núcleo do integral*” de $\mathcal{K}$

<u>Núcleo do Produto de Operadores</u>: Se $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ forem operadores integrais (com núcleos K1 e K2), então o núcleo do integral de $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ é

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} K_1(x,z)K_2(z,y)dz$$

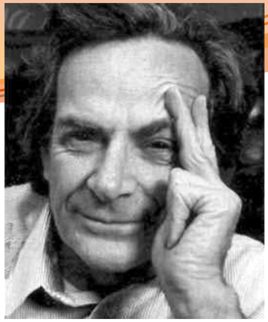
Propagador Livre

$$U(t) = e^{iH_0t/\hbar} \qquad H_0 := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

Expressão do **propagador para a partícula livre**

$$(e^{-iH_0t/\hbar}\psi)(x) = \left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{im|x-y|^2}{2\hbar t}} \psi(y)dy.$$

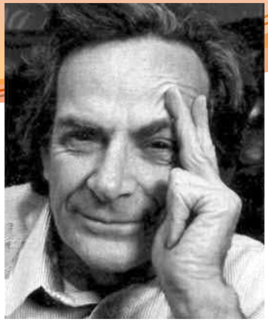
Integral de Feynman



1918-1988

Denotamos o núcleo do integral de $U(t)$ por $U_t(y,x)$.

Integral de Feynman



1918-1988

Denotamos o núcleo do integral de *U(t)* por $U_t(y,x)$.

Fórmula de Trotter diz que

$$e^{-iHt/\hbar} = e^{i(\frac{\hbar^2 t}{2m}\Delta - Vt)/\hbar} = \text{s-lim}_{n\to\infty} K_n^n$$

onde

$$K_n := e^{\frac{i\hbar t}{2mn}\Delta} e^{-\frac{iVt}{\hbar n}}$$

Integral de Feynman

$$K_n := e^{\frac{i\hbar t}{2mn}\Delta} e^{-\frac{iVt}{\hbar n}}$$

Temos

$$(K_n\psi)(x) = \int_{R^d} K_n(y,x)\psi(y)dy$$

onde $K_n(y,x) = e^{\frac{i\hbar t\Delta}{2mn}}(y,x)e^{-\frac{iV(y)t}{\hbar n}}$ é o núcleo do integral de K_n .

Integral de Feynman

$$K_n := e^{\frac{i\hbar t}{2mn}\Delta} e^{-\frac{iVt}{\hbar n}}$$

Temos

$$(K_n\psi)(x) = \int_{R^d} K_n(y,x)\psi(y)dy$$

onde $K_n(y,x) = e^{\frac{i\hbar t\Delta}{2mn}}(y,x)e^{-\frac{iV(y)t}{\hbar n}}$ é o núcleo do integral de K_n .

Pelo **Núcleo do Produto de Operadores**,

$$U_t(y,x) = \lim_{n\to\infty} \int \cdots \int K_n(y,x_{n-1}) \cdots K_n(x_2,x_1) K_n(x_1,x) dx_{n-1} \cdots dx_1 \qquad (*)$$

Integral de Feynman

Como $$K_n(y,x) = e^{\frac{i\hbar t\Delta}{2mn}}(y,x)e^{-\frac{iV(y)t}{\hbar n}}$$

Fazemos uso do propagador livre e acrescentamo-la a (*):

$$U_t(y,x) = \lim_{n\to\infty} \int \cdots \int e^{iS_n/\hbar} \left(\frac{2\pi i\hbar t}{mn}\right)^{-nd/2} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

Integral de Feynman

Como $K_n(y,x) = e^{\frac{i\hbar t\Delta}{2mn}}(y,x)e^{-\frac{iV(y)t}{\hbar n}}$

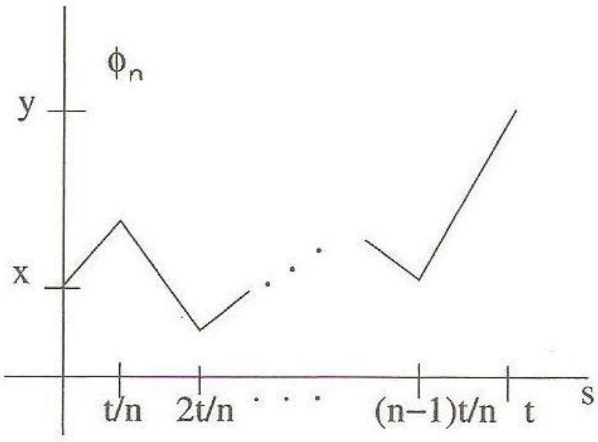
Fazemos uso do propagador livre e acrescentamo-la a (*):

$$U_t(y,x) = \lim_{n\to\infty}\int\cdots\int e^{iS_n/\hbar}\left(\frac{2\pi i\hbar t}{mn}\right)^{-nd/2} dx_1\cdots dx_{n-1}$$

onde $$S_n := \sum_{k=0}^{n-1}(mn|x_{k+1} - x_k|^2/2t - V(x_{k+1})t/n)$$

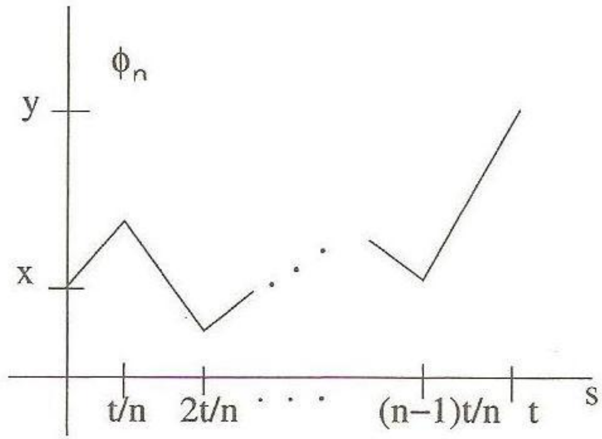
com x_o=x e x_n=y.

Definimos um caminho discreto ϕ_n por $\phi_n(0)=x$, $\phi_n(t/x)=x_1,\ldots,$ $\phi_n(t)=y$.



Integral de Feynman

Definimos um caminho discreto ϕ_n por $\phi_n(0)=x$, $\phi_n(t/x)=x_1$,…, $\phi_n(t)=y$.



Então
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ m \frac{|\phi_n((k+1)t/n) - \phi_n(kt/n)|^2}{2(t/n)^2} - V(\phi_n((k+1)t/n)) \right\} t/n$$

S_n é soma de Riemann da acção clássica

$$S(\phi, t) = \int_0^t \left\{ \frac{m}{2} |\dot{\phi}(s)|^2 - V(\phi(s)) \right\} ds$$ ao longo do caminho ϕ_n.

Integral de Feynman

$$U_t(y,x) = \lim_{n\to\infty} \int_{P^n_{x,y,t}} e^{iS_n/\hbar} D\phi_n$$

onde $P^n_{x,y,t}$ é o espaço dos caminhos ϕ_n com $\phi_n(0)=x$ e $\phi_n(t)=y$, onde

$$D\phi_n = \left(\frac{2\pi i\hbar t}{nm}\right)^{-nd/2} d\phi_n(t/n)\cdots d\phi_n((n-1)t/n)$$

Integral de Feynman

Heurísticamente, enquanto $n \to \infty$ ϕ_n aproxima-se de um caminho contínuo ϕ de x para y (no instante t), e $S_n \to S(\phi)$.

Então escrevemos

$$\boxed{U_t(y,x) = \int_{P_{x,y,t}} e^{iS(\phi,t)/\hbar} D\phi.}$$

onde

$$P_{x,y,t} := \{\phi : [0,t] \to \mathbb{R}^d | \int_0^t |\dot{\phi}|^2 < \infty, \quad \phi(0) = x, \quad \phi(t) = y\}$$

Heurísticamente, enquanto $n \to \infty$ ϕ_n aproxima-se de um caminho contínuo ϕ de x para y (no instante t), e $S_n \to S(\phi)$.

Então escrevemos

$$\boxed{U_t(y,x) = \int_{P_{x,y,t}} e^{iS(\phi,t)/\hbar} D\phi.}$$

onde

$$P_{x,y,t} := \{\phi : [0,t] \to \mathbb{R}^d | \int_0^t |\dot{\phi}|^2 < \infty, \quad \phi(0) = x, \quad \phi(t) = y\}$$

Este é o ***Integral de Feynman***.