Tabelas de Caracteres de Grupos Finitos

Teresa Conde

Encontro Nacional NTM

12 de Setembro de 2009

Objectivos:

Objectivos:

- Noções básicas da Teoria das Representações

Objectivos:

- Noções básicas da Teoria das Representações
- Construção de tabelas de caracteres

Objectivos:

- Noções básicas da Teoria das Representações
- Construção de tabelas de caracteres
- Aplicação: Teoria dos Grupos

Conhecemos bem grupos de matrizes

Conhecemos bem grupos de matrizes

Será possível usá-los para estudar outros grupos?

Conhecemos bem grupos de matrizes

Será possível usá-los para estudar outros grupos?

Notação

- F corpo
- G grupo finito
- $GL_n(F)$ grupo das matrizes invertíveis de ordem n sobre F

Conhecemos bem grupos de matrizes

Será possível usá-los para estudar outros grupos?

Notação

- F corpo
- G grupo finito
- $GL_n(F)$ grupo das matrizes invertíveis de ordem n sobre F

Definição

Uma **representação** de G sobre F é um homomorfismo

$$\begin{aligned} \rho : \quad G &\longrightarrow GL_n(F) \\ g &\longmapsto \rho(g) \end{aligned} \quad .$$

Chamamos a n o grau de ρ.

Exemplos

1. $$\begin{aligned} det: \quad & GL_n(F) \longrightarrow GL_1(F) = F^* \\ & A \longmapsto det(A) \end{aligned}$$

Exemplos

1.
$$\begin{aligned} det : \quad GL_n(F) &\longrightarrow GL_1(F) = F^* \\ A &\longmapsto det(A) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} sgn : \quad S_n &\longrightarrow GL_1(F) \\ g &\longmapsto sgn(g) \end{aligned}$$

Exemplos

1.
$$\begin{aligned} det: \quad GL_n(F) &\longrightarrow GL_1(F) = F^* \\ A &\longmapsto det(A) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} sgn: \quad S_n &\longrightarrow GL_1(F) \\ g &\longmapsto sgn(g) \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \sigma: \quad G &\longrightarrow GL_1(F) \\ g &\longmapsto \sigma(g) = 1_F \end{aligned}$$

Exemplos

1. $$\begin{aligned} det: \quad GL_n(F) &\longrightarrow GL_1(F) = F^* \\ A &\longmapsto det(A) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} sgn: \quad S_n &\longrightarrow GL_1(F) \\ g &\longmapsto sgn(g) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \sigma: \quad G &\longrightarrow GL_1(F) \\ g &\longmapsto \sigma(g) = 1_F \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \rho: \quad S_4 &\longrightarrow GL_4(F) \\ g &\longmapsto \rho(g) \end{aligned}$$

onde $\rho(g)$ é a matriz obtida aplicando g às colunas de I_4 .

Definição

Seja FG o espaço vectorial livre sobre F com base G:

$$FG = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \ : \ \alpha_g \in F \right\} .$$

O espaço vectorial FG, com a multiplicação definida por

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{g \in G} \mu_g g \right) = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh)$$

chama-se a **álgebra de grupo** de G sobre F.

Exemplo

$$G = S_3\,, \quad F = \mathbb{C}$$

Exemplo

$$G = S_3\,, \quad F = \mathbb{C}$$

Os elementos de $\mathbb{C}S_3$ são da forma:

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(1\,2) + \alpha_3(1\,3) + \alpha_4(2\,3) + \alpha_5(1\,2\,3) + \alpha_6(1\,3\,2)\,,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Exemplo

$$G = S_3\,, \quad F = \mathbb{C}$$

Os elementos de $\mathbb{C}S_3$ são da forma:

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(1\,2) + \alpha_3(1\,3) + \alpha_4(2\,3) + \alpha_5(1\,2\,3) + \alpha_6(1\,3\,2)\,,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

$(2\,(1\,2) + 1\,(1\,2\,3))\,(1\,(1) - 1\,(1\,3)) =$

Exemplo

$$G = S_3\,, \quad F = \mathbb{C}$$

Os elementos de $\mathbb{C}S_3$ são da forma:

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(1\,2) + \alpha_3(1\,3) + \alpha_4(2\,3) + \alpha_5(1\,2\,3) + \alpha_6(1\,3\,2)\,,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

$$(2\,(1\,2) + 1\,(1\,2\,3))\,(1\,(1) - 1\,(1\,3)) =$$
$$= 2\,(1\,2)(1) - 2\,(1\,2)(1\,3) + 1\,(1\,2\,3)(1) - 1\,(1\,2\,3)(1\,3) =$$

Exemplo

$$G = S_3\,, \quad F = \mathbb{C}$$

Os elementos de $\mathbb{C}S_3$ são da forma:

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(1\,2) + \alpha_3(1\,3) + \alpha_4(2\,3) + \alpha_5(1\,2\,3) + \alpha_6(1\,3\,2)\,,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}&(2\,(1\,2) + 1\,(1\,2\,3))\,(1\,(1) - 1\,(1\,3)) = \\ &= 2\,(1\,2)(1) - 2\,(1\,2)(1\,3) + 1\,(1\,2\,3)(1) - 1\,(1\,2\,3)(1\,3) = \\ &= 2\,(1\,2) - 2\,(1\,3\,2) + 1\,(1\,2\,3) - 1\,(2\,3)\,.\end{aligned}$$

Um ***FG*-módulo** V é um espaço vectorial sobre F, de dimensão finita, que é módulo para o anel FG e verifica:

$$\forall v \in V \ \ \forall r \in FG \ \ \forall \alpha \in F \ \ \alpha(rv) = (\alpha r)v = r(\alpha v)$$

Um ***FG*-módulo** V é um espaço vectorial sobre F, de dimensão finita, que é módulo para o anel FG e verifica:

$$\forall v \in V \quad \forall r \in FG \quad \forall \alpha \in F \quad \alpha(rv) = (\alpha r)v = r(\alpha v)$$

Exemplos

1. Consideremos FG.
   FG é espaço vectorial sobre F de dimensão $|G|$.

Um ***FG*-módulo** V é um espaço vectorial sobre F, de dimensão finita, que é módulo para o anel FG e verifica:

$$\forall v \in V \quad \forall r \in FG \quad \forall \alpha \in F \quad \alpha(rv) = (\alpha r)v = r(\alpha v)$$

Exemplos

1. Consideremos FG.
   FG é espaço vectorial sobre F de dimensão $|G|$.
   É módulo para o anel FG (considerando a multiplicação já definida).

Um ***FG*-módulo** V é um espaço vectorial sobre F, de dimensão finita, que é módulo para o anel FG e verifica:

$$\forall v \in V \;\; \forall r \in FG \;\; \forall \alpha \in F \;\; \alpha(rv) = (\alpha r)v = r(\alpha v)$$

Exemplos

1. Consideremos FG.
   FG é espaço vectorial sobre F de dimensão $|G|$.
   É módulo para o anel FG (considerando a multiplicação já definida).
   Verifica a propriedade acima referida.

Um ***FG*-módulo** V é um espaço vectorial sobre F, de dimensão finita, que é módulo para o anel FG e verifica:

$$\forall v \in V \quad \forall r \in FG \quad \forall \alpha \in F \quad \alpha(rv) = (\alpha r)v = r(\alpha v)$$

Exemplos

1. Consideremos FG.
   FG é espaço vectorial sobre F de dimensão $|G|$.
   É módulo para o anel FG (considerando a multiplicação já definida).
   Verifica a propriedade acima referida.
   Logo FG é um FG-módulo, designado FG-**módulo regular**.

Exemplos (cont.)

2. Seja V um espaço vectorial de dimensão 4 sobre F, com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exemplos (cont.)

2. Seja V um espaço vectorial de dimensão 4 sobre F, com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

   Podemos definir um FS_4-módulo, dito módulo de permutação, do seguinte modo:

   $$gv_i = v_{g(i)}, \forall g \in S_4, \ i = 1, 2, 3, 4$$

   e estendendo por linearidade a FS_4 e a V.

Seja V um FG-módulo de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base de V.

Seja V um FG-módulo de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base de V.
Para cada $g \in G$, $u, v \in V$, $\alpha \in F$, tem-se:

$$g(u+v) = gu + gv \quad \text{e} \quad g(\alpha v) = \alpha g v \,.$$

Seja V um FG-módulo de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base de V.
Para cada $g \in G$, $u, v \in V$, $\alpha \in F$, tem-se:

$$g(u+v) = gu + gv \quad \text{e} \quad g(\alpha v) = \alpha g v\,.$$

Logo, a função

$$\begin{aligned} r_g : \quad V &\rightarrow V \\ v &\rightarrow gv \end{aligned}$$

é linear.

Seja V um FG-módulo de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base de V.
Para cada $g \in G$, $u, v \in V$, $\alpha \in F$, tem-se:

$$g(u+v) = gu + gv \quad \text{e} \quad g(\alpha v) = \alpha g v\,.$$

Logo, a função

$$\begin{array}{rl} r_g : & V \longrightarrow V \\ & v \longrightarrow gv \end{array}$$

é linear. De facto é um isomorfismo

Seja V um FG-módulo de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base de V.
Para cada $g \in G$, $u, v \in V$, $\alpha \in F$, tem-se:

$$g(u + v) = gu + gv \quad \text{e} \quad g(\alpha v) = \alpha gv\,.$$

Logo, a função

$$\begin{aligned} r_g : \quad V &\to V \\ v &\to gv \end{aligned}$$

é linear. De facto é um isomorfismo e

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow GL_n(F) \\ g &\longmapsto [r_g]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

é uma representação de G.

Reciprocamente, seja

$$\begin{aligned} \rho: \quad G &\longrightarrow GL_n(F) \\ g &\longmapsto \rho(g) \end{aligned}$$

uma representação de G.

Reciprocamente, seja

$$\begin{aligned} \rho : \quad G &\longrightarrow GL_n(F) \\ g &\longmapsto \rho(g) \end{aligned}$$

uma representação de G.
Para cada $g \in G$, seja $r_g : V \to V$ o isomorfismo definido por

$$[r_g]_{\mathcal{B}} = \rho(g)\,.$$

Reciprocamente, seja

$$\begin{aligned} \rho : \quad G &\longrightarrow GL_n(F) \\ g &\longmapsto \rho(g) \end{aligned}$$

uma representação de G.
Para cada $g \in G$, seja $r_g : V \to V$ o isomorfismo definido por

$$[r_g]_{\mathcal{B}} = \rho(g)\,.$$

Então, V torna-se um FG-módulo se definirmos

$$gv = r_g(v)\,, \quad g \in G\,,\, v \in V$$

e estendermos esta acção por linearidade a FG.

Reciprocamente, seja

$$\begin{aligned} \rho : \quad G &\longrightarrow GL_n(F) \\ g &\longmapsto \rho(g) \end{aligned}$$

uma representação de G.
Para cada $g \in G$, seja $r_g : V \to V$ o isomorfismo definido por

$$[r_g]_{\mathcal{B}} = \rho(g)\,.$$

Então, V torna-se um FG-módulo se definirmos

$$gv = r_g(v)\,, \quad g \in G\,,\, v \in V$$

e estendermos esta acção por linearidade a FG.

Estudar Representações = Estudar *FG*-módulos

Definição

Seja V um FG-módulo.
Um subconjunto W de V diz-se um FG-**submódulo** de V se W for um subespaço vectorial de V verificando:

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W \quad gw \in W\,.$$

Definição

Seja V um FG-módulo.
Um subconjunto W de V diz-se um FG-**submódulo** de V se W for um subespaço vectorial de V verificando:

$$\forall g \in G \quad \forall w \in W \qquad gw \in W\,.$$

Definição

Um FG-módulo V é **irredutível** se:

- $V \neq \{0\}$
- V não possui FG-submódulos além de $\{0\}$ e de V

Exemplo

Seja V o FS_4-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exemplo

Seja V o FS_4-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Seja U o F-subespaço vectorial de V gerado por $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.

Exemplo

Seja V o FS_4-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Seja U o F-subespaço vectorial de V gerado por $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.
Como, para qualquer $g \in S_4$ se tem

$$g(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = v_{g(1)} + v_{g(2)} + v_{g(3)} + v_{g(4)} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \,,$$

Exemplo

Seja V o FS_4-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Seja U o F-subespaço vectorial de V gerado por $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.
Como, para qualquer $g \in S_4$ se tem

$$g(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = v_{g(1)} + v_{g(2)} + v_{g(3)} + v_{g(4)} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4\,,$$

conclui-se que U é um FS_4-submódulo de V.

Exemplo

Seja V o FS_4-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Seja U o F-subespaço vectorial de V gerado por $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.
Como, para qualquer $g \in S_4$ se tem

$$g(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = v_{g(1)} + v_{g(2)} + v_{g(3)} + v_{g(4)} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4\,,$$

conclui-se que U é um FS_4-submódulo de V. Logo V não é irredutível,

Exemplo

Seja V o FS_4-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Seja U o F-subespaço vectorial de V gerado por $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.
Como, para qualquer $g \in S_4$ se tem

$$g(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = v_{g(1)} + v_{g(2)} + v_{g(3)} + v_{g(4)} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \,,$$

conclui-se que U é um FS_4-submódulo de V. Logo V não é irredutível, mas U é irredutível (pois tem dimensão 1).

Teorema de Maschke

Seja G um grupo e F um corpo tal que $car(F) \nmid |G|$.
Se U é um FG-submódulo de V, existe um FG-submódulo de V, W, tal que

$$V = U \oplus W\,.$$

Teorema de Maschke

Seja G um grupo e F um corpo tal que $car(F) \nmid |G|$.
Se U é um FG-submódulo de V, existe um FG-submódulo de V, W, tal que

$$V = U \oplus W \,.$$

Usando este teorema e indução sobre $dim V$, prova-se o seguinte:

Teorema de Maschke

Seja G um grupo e F um corpo tal que $car(F) \nmid |G|$.
Se U é um FG-submódulo de V, existe um FG-submódulo de V, W, tal que

$$V = U \oplus W\,.$$

Usando este teorema e indução sobre $dim V$, prova-se o seguinte:

Todo o FG-módulo não nulo V tem uma decomposição

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s\,,$$

com U_i FG-submódulo irredutível de V, $i = 1, \ldots, s$.

Teorema de Maschke

Seja G um grupo e F um corpo tal que $car(F) \nmid |G|$.
Se U é um FG-submódulo de V, existe um FG-submódulo de V, W, tal que

$$V = U \oplus W\,.$$

Usando este teorema e indução sobre $dim V$, prova-se o seguinte:

Todo o FG-módulo não nulo V tem uma decomposição

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s\,,$$

com U_i FG-submódulo irredutível de V, $i = 1, \ldots, s$.

Basta classificar os irredutíveis

Teorema de Maschke

Seja G um grupo e F um corpo tal que $car(F) \nmid |G|$.
Se U é um FG-submódulo de V, existe um FG-submódulo de V, W, tal que

$$V = U \oplus W\,.$$

Usando este teorema e indução sobre $dim V$, prova-se o seguinte:

Todo o FG-módulo não nulo V tem uma decomposição

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s\,,$$

com U_i FG-submódulo irredutível de V, $i = 1, \ldots, s$.

Basta classificar os irredutíveis

Mas quantos serão os irredutíveis não isomorfos?

Decomponha-se o $\mathbb{C}G$-módulo regular como soma directa de $\mathbb{C}G$-submódulos irredutíveis:

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r \,.$$

Decomponha-se o $\mathbb{C}G$-módulo regular como soma directa de $\mathbb{C}G$-submódulos irredutíveis:

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r \, .$$

Prova-se que **qualquer $\mathbb{C}G$-módulo irredutível é isomorfo a algum U_i.**

Decomponha-se o $\mathbb{C}G$-módulo regular como soma directa de $\mathbb{C}G$-submódulos irredutíveis:

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r \, .$$

Prova-se que **qualquer $\mathbb{C}G$-módulo irredutível é isomorfo a algum U_i.**

Conjunto dos $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis não isomorfos é finito

Mais informações sobre do número de $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis não isomorfos:

Teorema

Suponhamos que $V_1, \ldots, V_k$ formam um conjunto completo de $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis não isomorfos.
Então,

$$\sum_{i=1}^{k} (dim V_i)^2 = |G|.$$

Mas existem ainda questões por responder:

Qual é exactamente o número de $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis não isomorfos?

Mas existem ainda questões por responder:

Qual é exactamente o número de $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis não isomorfos?

Dado um $\mathbb{C}G$-módulo, como saber é irredutível?

Mas existem ainda questões por responder:

Qual é exactamente o número de $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis não isomorfos?

Dado um $\mathbb{C}G$-módulo, como saber é irredutível?

Dados dois $\mathbb{C}G$-módulos, como saber se são isomorfos?

Caracteres

Definição

Seja V um $\mathbb{C}G$-módulo com base $\mathcal{B}$.
Define-se o **carácter** de V como sendo a função

$$\begin{aligned} \chi_V : \quad & G \longrightarrow \mathbb{C} \\ & g \longmapsto \chi_V(g) = tr[g]_{\mathcal{B}} \,. \end{aligned}$$

Exemplo

Seja V o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exemplo

Seja V o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Para cada $g \in S_4$,

$$gv_i = v_{g(i)} \,.$$

Exemplo

Seja V o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Para cada $g \in S_4$,

$$gv_i = v_{g(i)} .$$

Logo a entrada (i, i) da matriz $[g]_{\mathcal{B}}$ é 1 se $g(i) = i$, e 0 se $g(i) \neq i$.

Exemplo

Seja V o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Para cada $g \in S_4$,

$$gv_i = v_{g(i)} .$$

Logo a entrada (i, i) da matriz $[g]_{\mathcal{B}}$ é 1 se $g(i) = i$, e 0 se $g(i) \neq i$.

Seja

$$fix(g) = \{i \ : \ g(i) = i\} .$$

Exemplo

Seja V o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
Para cada $g \in S_4$,

$$gv_i = v_{g(i)} .$$

Logo a entrada (i,i) da matriz $[g]_\mathcal{B}$ é 1 se $g(i) = i$, e 0 se $g(i) \neq i$.

Seja

$$fix(g) = \{i \ : \ g(i) = i\} .$$

Então,

$$\chi_V(g) = tr[g]_\mathcal{B} = |fix(g)| .$$

Algumas propriedades simples de caracteres:

Seja χ_V o carácter de um $\mathbb{C}G$-módulo V. Então tem-se:

1. $\chi_V(1_G) = dimV$.

Algumas propriedades simples de caracteres:

Seja χ_V o carácter de um $\mathbb{C}G$-módulo V. Então tem-se:

1. $\chi_V(1_G) = dimV$.
2. Se x e y são conjugados em G, então $\chi_V(x) = \chi_V(y)$.

Algumas propriedades simples de caracteres:

Seja χ_V o carácter de um $\mathbb{C}G$-módulo V. Então tem-se:

1. $\chi_V(1_G) = dimV$.
2. Se x e y são conjugados em G, então $\chi_V(x) = \chi_V(y)$.
3. Se $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$ (soma directa de $\mathbb{C}G$-submódulos irredutíveis de V), então

$$\chi_V = \chi_{U_1} + \cdots + \chi_{U_s}\,.$$

Algumas propriedades simples de caracteres:

Seja χ_V o carácter de um $\mathbb{C}G$-módulo V. Então tem-se:

1. $\chi_V(1_G) = dim V$.
2. Se x e y são conjugados em G, então $\chi_V(x) = \chi_V(y)$.
3. Se $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$ (soma directa de $\mathbb{C}G$-submódulos irredutíveis de V), então

$$\chi_V = \chi_{U_1} + \cdots + \chi_{U_s}.$$

4. $\mathbb{C}G$-módulos isomorfos têm o mesmo carácter.

Definição

Suponhamos que ϑ e ϕ são funções de G para $\mathbb{C}$. Defina-se:

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g)\overline{\phi(g)}$$

Definição

Suponhamos que ϑ e ϕ são funções de G para $\mathbb{C}$. Defina-se:

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g)\overline{\phi(g)}$$

É um produto interno no espaço das funções de G para $\mathbb{C}$

Critério de irredutibilidade de um $\mathbb{C}G$-módulo

Critério de irredutibilidade de um $\mathbb{C}G$-módulo

Teorema

Sejam U e V $\mathbb{C}G$-módulos não isomorfos. Então,

1. *U é irredutível se e só se $\langle \chi_U, \chi_U \rangle = 1$.*
2. *Se U e V forem irredutíveis, então $\langle \chi_U, \chi_V \rangle = 0$.*

Critério de irreducibilidade de um $\mathbb{C}G$-módulo

Teorema

Sejam U e V $\mathbb{C}G$-módulos não isomorfos. Então,

1. *U é irredutível se e só se $\langle \chi_U, \chi_U \rangle = 1$.*
2. *Se U e V forem irredutíveis, então $\langle \chi_U, \chi_V \rangle = 0$.*

Os caracteres irredutíveis de G formam um conjunto ortonormado do espaço das funções de G para $\mathbb{C}$.

Critério para verificar se dois $\mathbb{C}G$-módulos são isomorfos

Critério para verificar se dois $\mathbb{C}G$-módulos são isomorfos

Teorema

Sejam V e W $\mathbb{C}G$-módulos. Então

$$V \cong W \quad \text{se e só se} \quad \chi_V = \chi_W\,.$$

Critério para verificar se dois $\mathbb{C}G$-módulos são isomorfos

Teorema

Sejam V e W $\mathbb{C}G$-módulos. Então

$$V \cong W \quad \text{se e só se} \quad \chi_V = \chi_W .$$

O carácter determina os $\mathbb{C}G$-módulos

Número de $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis não isomorfos

Número de $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis não isomorfos

Teorema

O número de caracteres irredutíveis de G é igual ao número de classes de conjugação de G.

Tabelas de Caracteres

Definição

Sejam $\chi_1, \ldots, \chi_k$ os caracteres irredutíveis de G e $g_1, \ldots, g_k$ representantes das classes de conjugação de G, com $g_1 = 1_G$. A tabela $k \times k$ cuja entrada na posição (i, j) é $\chi_i(g_j)$:

$$\begin{array}{c|ccc} & g_1 & \cdots & g_k \\ \hline \chi_1 & \chi_1(g_1) & \cdots & \chi_1(g_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_k & \chi_k(g_1) & \cdots & \chi_k(g_k) \end{array}$$

chama-se **tabela de caracteres de** G.

Resultados úteis para completar tabelas:

Resultados úteis para completar tabelas:

A soma dos quadrados dos elementos da primeira coluna da tabela de caracteres é igual a $|G|$.

Resultados úteis para completar tabelas:

A soma dos quadrados dos elementos da primeira coluna da tabela de caracteres é igual a $|G|$.

As colunas da tabela de caracteres são vectores ortogonais de $\mathbb{C}^k$.

Resultados úteis para completar tabelas:

A soma dos quadrados dos elementos da primeira coluna da tabela de caracteres é igual a $|G|$.

As colunas da tabela de caracteres são vectores ortogonais de $\mathbb{C}^k$.

Outros resultados:

Resultados úteis para completar tabelas:

A soma dos quadrados dos elementos da primeira coluna da tabela de caracteres é igual a $|G|$.

As colunas da tabela de caracteres são vectores ortogonais de $\mathbb{C}^k$.

Outros resultados:

Seja χ um carácter irredutível de G e λ um carácter de grau 1 de G. Então,

- A função $\overline{\chi}$ definida por $\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$, $g \in G$, é um carácter irredutível de G.

Resultados úteis para completar tabelas:

A soma dos quadrados dos elementos da primeira coluna da tabela de caracteres é igual a $|G|$.

As colunas da tabela de caracteres são vectores ortogonais de $\mathbb{C}^k$.

Outros resultados:

Seja χ um carácter irredutível de G e λ um carácter de grau 1 de G. Então,

- A função $\overline{\chi}$ definida por $\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$, $g \in G$, é um carácter irredutível de G.
- A função $\lambda\chi$ definida por $\lambda\chi(g) = \lambda(g)\chi(g)$, $g \in G$, é um carácter irredutível de G.

Problema

Um certo grupo de ordem 12 tem precisamente seis classes de conjugação, com representantes $g_1, \ldots, g_6$ (onde $g_1 = 1_G$). Sabe-se que G tem dois caracteres irredutíveis χ e ϕ tomando os seguintes valores:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2

Pretende-se completar a tabela de caracteres de G.

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G.

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G.

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G. $\chi\phi$ também é carácter irredutível de G.

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G. $\chi\phi$ também é carácter irredutível de G.

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G. $\chi\phi$ também é carácter irredutível de G. Na linha que falta, obtemos o primeiro elemento, x_1, sabendo que o quadrado da norma da primeira coluna é $|G|$,

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + x_1^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 1$$

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2
χ_2	1					

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G. $\chi\phi$ também é carácter irredutível de G. Na linha que falta, obtemos o primeiro elemento, x_1, sabendo que o quadrado da norma da primeira coluna é $|G|$,

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + x_1^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 1$$

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2
χ_2	1					

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G. $\chi\phi$ também é carácter irredutível de G. Na linha que falta, obtemos o primeiro elemento, x_1, sabendo que o quadrado da norma da primeira coluna é $|G|$, o segundo, x_2, usando a ortogonalidade das colunas 1 e 2

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + x_1^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$1 \times 1 + 1 \times \overline{-i} + 1 \times \overline{i} + 1 \times \overline{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2
χ_2	1	-1				

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G. $\chi\phi$ também é carácter irredutível de G. Na linha que falta, obtemos o primeiro elemento, x_1, sabendo que o quadrado da norma da primeira coluna é $|G|$, o segundo, x_2, usando a ortogonalidade das colunas 1 e 2

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + x_1^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$1 \times 1 + 1 \times \overline{-i} + 1 \times \overline{i} + 1 \times \overline{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2
χ_2	1	-1				

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G. $\chi\phi$ também é carácter irredutível de G. Na linha que falta, obtemos o primeiro elemento, x_1, sabendo que o quadrado da norma da primeira coluna é $|G|$, o segundo, x_2, usando a ortogonalidade das colunas 1 e 2, ...

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + x_1^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$1 \times 1 + 1 \times \overline{-i} + 1 \times \overline{i} + 1 \times \overline{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

Resolução

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2
χ_2	1	-1	-1	1	1	1

$\overline{\chi}$ ainda é carácter irredutível de G. $\chi\phi$ também é carácter irredutível de G. Na linha que falta, obtemos o primeiro elemento, x_1, sabendo que o quadrado da norma da primeira coluna é $|G|$, o segundo, x_2, usando a ortogonalidade das colunas 1 e 2, ...

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + x_1^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$1 \times 1 + 1 \times \overline{-i} + 1 \times \overline{i} + 1 \times \overline{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

Problema

Consideremos S_4. Pretendemos construir a sua tabela de caracteres.

Problema

Consideremos S_4. Pretendemos construir a sua tabela de caracteres.

Sabemos que as classes de conjugação de S_4 correspondem às partições de 4:

$$\begin{array}{lcl} (1,1,1,1) & \rightarrow & id \\ (2,1,1) & \rightarrow & (12) \\ (3,1) & \rightarrow & (123) \\ (2,2) & \rightarrow & (12)(34) \\ (4) & \rightarrow & (1234)\,. \end{array}$$

Logo S_4 tem 5 caracteres irredutíveis.

Problema

Consideremos S_4. Pretendemos construir a sua tabela de caracteres.

Sabemos que as classes de conjugação de S_4 correspondem às partições de 4:

$$\begin{array}{lcl}
(1,1,1,1) & \rightarrow & id \\
(2,1,1) & \rightarrow & (12) \\
(3,1) & \rightarrow & (123) \\
(2,2) & \rightarrow & (12)(34) \\
(4) & \rightarrow & (1234)\,.
\end{array}$$

Logo S_4 tem 5 caracteres irredutíveis.
Dois deles já conhecemos: o trivial e o sinal de uma permutação.

Teorema

A função ν:

$$\begin{aligned} \nu : \quad & S_4 \longrightarrow \mathbb{C} \\ & g \longmapsto \nu(g) = |fix(g)| - 1 \end{aligned}$$

é um carácter de S_4.

Demonstração.

Sabemos que se V for o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, então $\chi_V(g) = |fix(g)|$, $g \in S_4$.

Demonstração.

Sabemos que se V for o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, então $\chi_V(g) = |fix(g)|$, $g \in S_4$.
Seja U o $\mathbb{C}$-subespaço vectorial de base $\{v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$.

Demonstração.

Sabemos que se V for o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, então $\chi_V(g) = |fix(g)|$, $g \in S_4$.
Seja U o $\mathbb{C}$-subespaço vectorial de base $\{v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$.
Já vimos que U é um $\mathbb{C}S_4$-submódulo de V.

Demonstração.

Sabemos que se V for o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, então $\chi_V(g) = |fix(g)|$, $g \in S_4$.
Seja U o $\mathbb{C}$-subespaço vectorial de base $\{v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$.
Já vimos que U é um $\mathbb{C}S_4$-submódulo de V.
Note-se que $[g]_{\{v_1+\ldots+v_4\}} = 1$, logo $\chi_U(g) = 1$, $\forall g \in S_4$.

Demonstração.

Sabemos que se V for o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, então $\chi_V(g) = |fix(g)|$, $g \in S_4$.
Seja U o $\mathbb{C}$-subespaço vectorial de base $\{v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$.
Já vimos que U é um $\mathbb{C}S_4$-submódulo de V.
Note-se que $[g]_{\{v_1+\ldots+v_4\}} = 1$, logo $\chi_U(g) = 1$, $\forall g \in S_4$.
Pelo teorema de Maschke, existe um $\mathbb{C}S_4$-submódulo W de V tal que $V = U \oplus W$.

Demonstração.

Sabemos que se V for o $\mathbb{C}S_4$-módulo de permutação com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, então $\chi_V(g) = |fix(g)|$, $g \in S_4$.
Seja U o $\mathbb{C}$-subespaço vectorial de base $\{v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$.
Já vimos que U é um $\mathbb{C}S_4$-submódulo de V.
Note-se que $[g]_{\{v_1+\ldots+v_4\}} = 1$, logo $\chi_U(g) = 1$, $\forall g \in S_4$.
Pelo teorema de Maschke, existe um $\mathbb{C}S_4$-submódulo W de V tal que $V = U \oplus W$.
Então $\chi_V = \chi_U + \chi_W$, ou seja:

$$\chi_W(g) = \chi_V(g) - \chi_U(g) = |fix(g)| - 1, \; g \in S_4$$

$\square$

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1

Seja χ_3 o carácter definido por $\chi_3(g) = |fix(g)| - 1, \; g \in S_4$.

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1

Seja χ_3 o carácter definido por $\chi_3(g) = |fix(g)| - 1, \; g \in S_4$.
Ora

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1\,.$$

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1

Seja χ_3 o carácter definido por $\chi_3(g) = |fix(g)| - 1, \ g \in S_4$.
Ora

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1 \,.$$

Logo χ_3 é irredutível.

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	0	-1	-1

Seja χ_3 o carácter definido por $\chi_3(g) = |fix(g)| - 1, \; g \in S_4$.
Ora

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1\,.$$

Logo χ_3 é irredutível.

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	0	-1	-1

Seja χ_3 o carácter definido por $\chi_3(g) = |fix(g)| - 1, \; g \in S_4$.
Ora

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1\,.$$

Logo χ_3 é irredutível. $\chi_2\chi_3$ também é carácter irredutível de S_4.

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	0	-1	-1
$\chi_2\chi_3$	3	-1	0	-1	1

Seja χ_3 o carácter definido por $\chi_3(g) = |fix(g)| - 1,\ g \in S_4$.
Ora

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1\,.$$

Logo χ_3 é irredutível. $\chi_2\chi_3$ também é carácter irredutível de S_4.

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	0	-1	-1
$\chi_2\chi_3$	3	-1	0	-1	1

Seja χ_3 o carácter definido por $\chi_3(g) = |fix(g)| - 1,\ g \in S_4$.
Ora

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1\,.$$

Logo χ_3 é irredutível. $\chi_2\chi_3$ também é carácter irredutível de S_4.
De modo análogo ao problema anterior completa-se a última linha usando as relações de ortogonalidade.

Resolução

	1_G	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	0	-1	-1
$\chi_2\chi_3$	3	-1	0	-1	1
χ_4	2	0	-1	2	0

Seja χ_3 o carácter definido por $\chi_3(g) = |fix(g)| - 1,\ g \in S_4$.
Ora

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1\,.$$

Logo χ_3 é irredutível. $\chi_2\chi_3$ também é carácter irredutível de S_4. De modo análogo ao problema anterior completa-se a última linha usando as relações de ortogonalidade.

Determinando subgrupos normais

Dado um carácter χ de G, defina-se

$$\ker\chi = \{g \in G \;:\; \chi(g) = \chi(1_G)\}\,.$$

Determinando subgrupos normais

Dado um carácter χ de G, defina-se

$$\ker\chi = \{g \in G \ : \ \chi(g) = \chi(1_G)\}.$$

Teorema

Um subgrupo N de G é normal se e só se existirem caracteres irredutíveis $\chi_1, \ldots, \chi_t$ de G, tais que $N = \cap_{i=1}^{t} \ker\chi_i$.

Determinando subgrupos normais

Dado um carácter χ de G, defina-se

$$\ker\chi = \{g \in G \ : \ \chi(g) = \chi(1_G)\}.$$

Teorema

Um subgrupo N de G é normal se e só se existirem caracteres irredutíveis $\chi_1, \ldots, \chi_t$ de G, tais que $N = \cap_{i=1}^{t} \ker\chi_i$.

Teorema

O grupo G é não simples se e só se $\chi(g) = \chi(1_G)$, para algum carácter irredutível de G não trivial e para algum $g \neq 1_G$.

Tabela de caracteres de G:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2
χ_2	1	-1	-1	1	1	1

Tabela de caracteres de G:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ	1	-i	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2
$\overline{\chi}$	1	i	-i	1	-1	-1
$\chi\phi$	2	0	0	-1	1	-2
χ_2	1	-1	-1	1	1	1

G não é simples