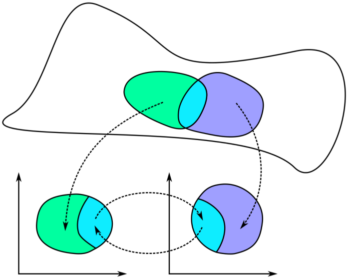
K-estabilidade de $\mathbb{C}P^2$ com blow ups em 2 pontos

Pedro Santos

Variedades

Uma variedade é um espaço topológico que localmente se parece com $\mathbb{R}^n$.

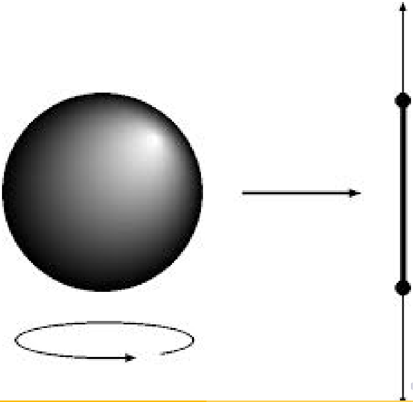


Variedades Kähler

Uma Variedade Simpléctica é um duplo (M, w) onde M é uma variedade e w é uma 2-forma fechada não-degenerada.
Uma variedade Kähler é um triplo (M, ω, J) onde (M, w) é uma variedade Simpléctica, $J : TM \to TM$ tal que $J^2 = -Id$ e $w(-, J(-))$ é uma métrica Riemnianna.
Como exemplo podemos considerar $\mathbb{C}^n$.

Variedades Tóricas Kähler

Uma Variedade Tórica Simpléctica é uma variedade Simpléctica com uma acção Hamiltoniana e efetiva de um toro n. Estas condições permitem-nos representar estas variedades como polítopos em $\mathbb{R}^n$, através do mapa momento.
Uma variedade Tórica Kähler é uma variedade Kähler tal que o toro n atua por isometrias e biholomorfismos.



K-estabilidade e Questões Relevantes

Será que dada uma variedade Kähler (M, w_0, J) existe w tal que w é compatível com J e $[w] = [w_0]$ tal que $\mathrm{scal}(g(w, J)) = c$? Resume-se a resolver um problema de equações diferencias parciais. Sabe-se que no caso tórico $\mathbb{R}^2$ isto vai ser equivalente a K-estabilidade, e Donaldson conjecturou que vai ser equivalente para qualquer dimensão.

K-estabilidade

Consideremos o polítopo P associado a uma variedade tórica Kähler (M, w, J). Consideramos o funcional

$$L(u) = \int_{\partial P} u d\sigma - \int_P A dx$$

onde $A = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, e os coeficientes a_j podem ser determinados resolvendo o sistema

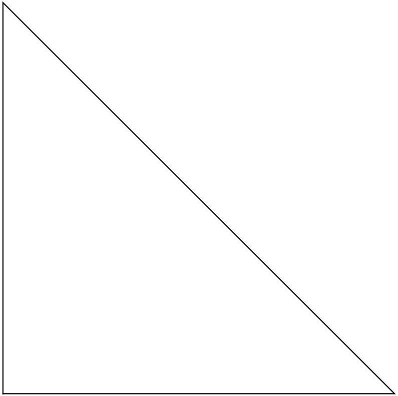
$$L(1) = 0 \text{ e } L(x_i) = 0, i = 1, ..., n$$

E $d\sigma$ é definido na face $F_i \subset \partial P$ associada com a normal l_i, $d\sigma = \frac{1}{|l_i|} dx$.
Uma função u diz-se seccionalmente linear em P se $u(x) = max\{l_1(x), ..., l_m(x)\}$, onde l_i são funções lineares.
Dizemos que a variedade é K-estável se $L(u) \geq 0$ para todas as funções seccionalmente lineares em P.

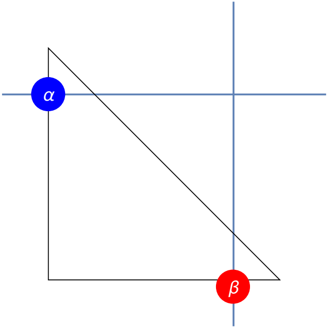
O que se sabe

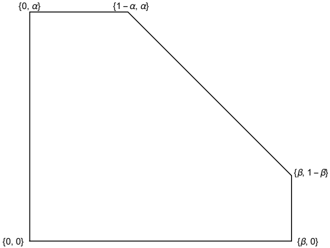
Sabemos que em $\mathbb{R}^2$ para polítopo com 4 ou menos vértices eles vão ser sempre K-estáveis. Existe um exemplo de um polítopo em $\mathbb{R}^2$ com 8 vértices que não vai ser K-estável.
A questão que se põe agora é o que acontece no caso de termos um polítopo em $\mathbb{R}^2$ com 5 vértices ?

O polítopo associado a esta variedade vai ser um triângulo com vértices $(0,0),(1,0),(0,1)$.



$\mathbb{C}P^2$ com blow-ups em 2 pontos





K-estabilidade quando $\alpha = \beta$

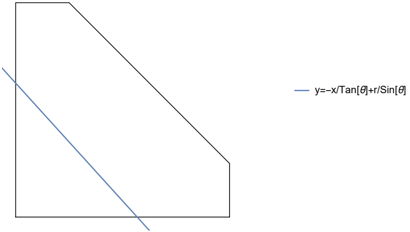
Vamos ter que no caso em que $\alpha = \beta$ a variedade vai ser K-estável.

- Calcular os Coeficientes de A

$$\mathbf{a_0} = -\frac{6(3-10\beta+8\beta^2-6\beta^4+4\beta^5)}{1-12\beta+42\beta^2-64\beta^3+54\beta^4-24\beta^5+4\beta^6}$$
$$\mathbf{a_1} = \frac{24(1-4\beta+6\beta^2-5\beta^3+2\beta^4)}{1-12\beta+42\beta^2-64\beta^3+54\beta^4-24\beta^5+4\beta^6}$$

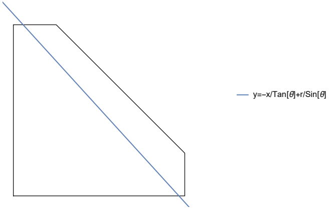
- Como ver que $L(u) \geq 0$? Para isto consideramos as funções $u_{r,\theta} = \max\{x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - r, 0\}$ com $\theta \in (0, \pi/2)$, e para θ fixo $F(r) := L(u_{r,\theta})$. Assim o que queremos provar resume-se a ver que $F(r) \geq 0 \; \forall r, \theta$.

$F(r)$ e os seus diferentes casos



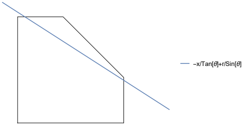
$$F(r) = \frac{1}{12} r^2(-r\csc(2\theta)(4a_0 + a_1 r\sec(\theta) + a_2 r\csc(\theta)) + 6\csc(\theta) + 6\sec(\theta))$$

$0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$



$$F(r) = \frac{1}{24}(24r\beta + 12r^2\sec(\beta) - 12\beta^2\sin(\theta) - 12\beta^2\sin(\theta) + 12\sec(\theta)(r - \beta\sin(\theta))^2 - \beta\sec(\theta)^2(-r + \beta\sin(\theta))(-4a_1r^2 + a_1\beta^2 - 6r(2a_0 + a_2\beta)\cos(\theta) - a_1\beta^2\cos(2\theta) + 2a_1r\beta\sin(\theta) + a_2\beta^2\sin(2\theta)) - \beta^3(-4a_1r - (4a_0 + a_2\beta)\cos(\theta) + 3a_1\beta\sin(\theta))\tan(\theta)^2)$$

$\theta < \arctan(\frac{\beta}{2\beta-1})$



$$
\begin{gathered}
F(r) = \tfrac{1}{24}(24\beta\sin(\theta) + 24\beta\cos(\theta) + \\
\sin(\theta)\left(4\left(\beta^3 - 3\beta + 1\right)a_0 + (2\beta^4 - 8\beta + 3)a_1\right) + \cos(\theta)(4(\beta^3 - 3\beta + 1)a_0 + \\
(2\ \beta^4 - 8\beta + 3)a_1) + \beta\sec^2(\theta)(\beta\sin(\theta) - \\
r)\left(6r\cos(\theta)(2a_0 + \beta a_1) + a_1\left(-\beta^2\sin(2\theta) + \beta^2\cos(2\theta) - \beta^2 + 4r^2 - 2\beta r\sin(\theta)\right.\right. \\
\csc^2(\theta)\sec^2(\theta)(\beta\cos(\theta) - r)(\beta(\sin(\theta) + \cos(\theta)) - \\
r)\left(\beta\cos(3\theta)(3a_0 + \beta a_1) + \cos(\theta)(a_1\left(\beta^2 + 2r^2\right) - \right. \\
3\ \beta a_0 + 2a_1\sin(\theta)\left(4\beta^2 + r^2\right) - 5\beta a_1 r\sin(2\theta) + 3\beta a_1 r\cos(2\theta) - 7\beta a_1 r - \\
4r\left(3\left(2\beta^2 - 4\beta + 1\right)a_0 + 2(\beta^3 - 3\beta + 1)a_1\right) + \tan^2(\theta)(\beta\cot(\theta) + \beta - \\
r\csc(\theta))^3(-(2\cos(\theta)(2a_0 + \beta a_1) + 3a_1(-\beta\csc(\theta) + r\cot(\theta) + r))) - \\
12\sin(\theta) - 12\cos(\theta) + \\
24\ (\text{r-}\beta\cos(\theta))(\beta(-\cot(\theta)) + \beta + r\csc(\theta) - 1) + \\
12\left((\beta - 1)^2\cos(\theta) - \sec(\theta)(r - \beta\sin(\theta))^2\right) + 12\sin(\theta)\left((\beta - \right. \\
1)^2 - (\beta\cot(\theta) - r\csc(\theta))^2 + 24(r - \beta\sin(\theta))(\beta(-\tan(\theta)) + \beta + \\
r\sec(\theta) - 1) - 48\beta r + 24r)
\end{gathered}
$$

Como provar a **K**-estabilidade?

Primeira aspeto a reparar é que os vértices do polítopo vão ser pontos de descontinuidade da segunda derivada.Conseguimos ver que em cada um deles temos que $F(r_i) \geq 0, \forall \beta, \theta$ nos intervalos considerados.
Também reparamos que em termos de r as expressões para $F'(r)$ são polinómios de grau menor ou igual que 3. Assim usando formulas resolventes obtivemos os pontos x_i tal que $F'(x_i) = 0$. Com isto depois foi uma questão de ver ou estes pontos não estavam dentro dos intervalos considerados para cada expressão de $F(r)$, que $F(x_i) \geq 0$ ou que $F''(x_i) < 0$.

$\alpha \neq \beta$

A ideia agora seria tentar provar a **K**-estabilidade quando $\alpha \neq \beta$ de uma maneira semelhante ao que fizemos anteriormente. O problema é que as expressões para os coeficientes ficam extremamente mais complicadas e com mais uma variável o que torna a análise das funções $F(r)$ mais difícil e não conseguimos ver se vão ser de facto não negativas.

Coeficientes

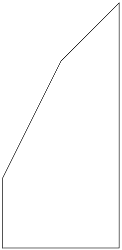
$$\mathbf{a_0} = -\Big((6(3\alpha^9 - 8\alpha^7(-5+2\beta) + 16\alpha^6(-3+2\beta) + \alpha^8(-17+3\beta) + 8\alpha^2(-1+\beta)^3(-5+4\beta) + (-1+\beta)^6(3+\beta+\beta^2+3\beta^3) - 8\alpha^3(-1+\beta)^2(6-6\beta-\beta^2+4\beta^3) + \alpha(-1+\beta)^4(-17+12\beta-2\beta^2-4\beta^3+3\beta^4) + 2\alpha^5(11-8\beta-16\beta^3+11\beta^4) + \alpha^4(22-58\beta+32\beta^2+72\beta^3-82\beta^4+22\beta^5)\Big)/\Big(-10\alpha^9+\alpha^{10}+(-1+\beta)^{10}+9\alpha^8(5-2\beta+\beta^2)-2\alpha(-1+\beta)^6(5-6\beta+9\beta^2)+8\alpha^7(-15+15\beta-9\beta^2+\beta^3+8\alpha^3(-1+\beta)^3(15-16\beta+12\beta^2-6\beta^3+\beta^4)+3\alpha^2(-1+\beta)^4(15-20\beta+22\beta^2-12\beta^3+3\beta^4)+2\alpha^6(105-176\beta+132\beta^2-36\beta^3+5\beta^4)-12\alpha^5(21-50\beta+48\beta^2-22\beta^3+5\beta^4)+2\alpha^4(-1+\beta)^2(105-120\beta+72\beta^2-20\beta^3+5\beta^4))\Big)$$

A Procura de um Contra exemplo

Um polítopo $P^{(5)}$ pertence a uma classe de equivalência do polítopo $P^{(5)}[k]$ para $k \in \mathbb{N}_0$, onde $P^{(5)}[k]$ tem os vértices

$$\begin{gathered} p_0 = (0,0) \\ p_1 = (0,h) \\ p_2 = (t, h + (k+1)t) \\ p_3 = (1, h + (k+1)t + k(1-t)) \\ p_4 = (1,0) \end{gathered}$$

com t, h are constantes positivas e $t < 1$.



$$
\begin{gathered}
\mathbf{a_2} = \\
24(t-1)t\Big(6h^3 + 2h^2 (3k(t+1) - t (t^3 - 2t^2 + t - 6)) + h (k^2 (2t^2 + \\
4\ \mathrm{t}{+}1{+}2kt (-t^3 + 2t^2 + 3t + 3) + t^2 (-2t^3 + 7t^2 - 8t + 10) + \\
t (k^3 t + k^2 (-t^3 + 3t^2 + 1) - kt (t^3 - 3t^2 + 3t - 4) - \\
\mathrm{t}^2 (t^3 - 4t^2 + 6t - 4) \Big)/\Big(24h^5 + 12h^4 (5k + t (-2t^3 + 4t^2 - 7t + 10)) + \\
16h^3 (4k^2 + kt (-3t^3 + 5t^2 - 9t + 15) + \\
\mathrm{t}^2 (t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 18t + 15) + \\
12h^2 (3k^3 + k^2 t (-4t^3 + 6t^2 - 9t + 16) + kt^2 (2t^4 - 12t^3 + 21t^2 - 32t + 30) + \\
\mathrm{t}^3 (2t^4 - 11t^3 + 24t^2 - 32t + 20) + \\
2h (5k^4 - 4k^3 t (3t^3 - 5t^2 + 6t - 9) + 2k^2 t^2 (4t^4 - 24t^3 + \\
39\ \mathrm{t}^2 - 52t + 48 + 4kt^3 (3t^4 - 16t^3 + 33t^2 - 45t + 30) + \\
t^4 (9t^4 - 48t^3 + 104t^2 - 120t + 60) + k^5 + k^4 t (-4t^3 + 8t^2 - 9t + 10) + \\
2\ \mathrm{k}^3 t^2 (2t^4 - 12t^3 + 21t^2 - 24t + 18) + \\
2k^2 t^3 (4t^4 - 21t^3 + 42t^2 - 52t + 32) + \\
kt^4 (9t^4 - 48t^3 + 104t^2 - 120t + 60) - \\
t^5 (t^5 - 10t^4 + 36t^3 - 64t^2 + 60t - 24) \Big)
\end{gathered}
$$

A Procura de um Contra exemplo

Para já ainda não conseguimos encontrar valores tal que $P^{(5)}[k]$ não fosse **K**-estável, e achamos que de facto vão ser todos **K**-estáveis mas ainda ninguém o conseguiu provar.