A floresta escondida em potências de operadores

Pedro Fernandes

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

3 de Setembro de 2020

Orientado pelo Professor Samuel Lopes

Programa Novos Talentos em Matemática

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

- Seja $h(x)$ de classe C^∞ e $\partial = \frac{d}{dx}$.
- Qual é a forma normal do operador $(h\partial)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$?

$$(h\partial)^n(f) = ??$$

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

- Seja $h(x)$ de classe C^∞ e $\partial = \frac{d}{dx}$.
- Qual é a forma normal do operador $(h\partial)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$?

$$(h\partial)^n(f) = ??$$

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

- Seja $h(x)$ de classe C^∞ e $\partial = \frac{d}{dx}$.
- Qual é a forma normal do operador $(h\partial)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$?

$$(h\partial)^n(f) = ??$$

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

- Seja $h(x)$ de classe C^∞ e $\partial = \frac{d}{dx}$.
- Qual é a forma normal do operador $(h\partial)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$?

$$(h\partial)^n(f) = ??$$

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

$$(h\partial)^1(f) = (h\partial)(f) = h\partial(f)$$

$$\to \quad 1h\partial$$

$$(h\partial)^2(f) = (h\partial)(h\partial(f)) = h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)$$

$$\to \quad 1h\partial(h)\partial + 1h^2\partial^2$$

$$(h\partial)^3(f) = (h\partial)(h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)) =$$
$$= h(\partial(h))^2\partial(f) + h^2\partial^2(h)\partial(f) + 3h^2\partial(h)\partial^2(f) + h^3\partial^3(f)$$

$$\to \quad 1h(\partial(h))^2\partial + 1h^2\partial^2(h)\partial + 3h^2\partial(h)\partial^2 + 1h^3\partial^3$$

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

$$(h\partial)^1(f) = (h\partial)(f) = h\partial(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial$$

$$(h\partial)^2(f) = (h\partial)(h\partial(f)) = h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial(h)\partial + 1h^2\partial^2$$

$$(h\partial)^3(f) = (h\partial)(h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)) =$$

$$= h(\partial(h))^2\partial(f) + h^2\partial^2(h)\partial(f) + 3h^2\partial(h)\partial^2(f) + h^3\partial^3(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h(\partial(h))^2\partial + 1h^2\partial^2(h)\partial + 3h^2\partial(h)\partial^2 + 1h^3\partial^3$$

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

$$(h\partial)^1(f) = (h\partial)(f) = h\partial(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial$$

$$(h\partial)^2(f) = (h\partial)(h\partial(f)) = h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial(h)\partial + 1h^2\partial^2$$

$$(h\partial)^3(f) = (h\partial)(h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)) =$$

$$= h(\partial(h))^2\partial(f) + h^2\partial^2(h)\partial(f) + 3h^2\partial(h)\partial^2(f) + h^3\partial^3(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h(\partial(h))^2\partial + 1h^2\partial^2(h)\partial + 3h^2\partial(h)\partial^2 + 1h^3\partial^3$$

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

$$(h\partial)^1(f) = (h\partial)(f) = h\partial(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial$$

$$(h\partial)^2(f) = (h\partial)(h\partial(f)) = h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial(h)\partial + 1h^2\partial^2$$

$$(h\partial)^3(f) = (h\partial)(h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)) =$$

$$= h(\partial(h))^2\partial(f) + h^2\partial^2(h)\partial(f) + 3h^2\partial(h)\partial^2(f) + h^3\partial^3(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h(\partial(h))^2\partial + 1h^2\partial^2(h)\partial + 3h^2\partial(h)\partial^2 + 1h^3\partial^3$$

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

$$(h\partial)^1(f) = (h\partial)(f) = h\partial(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial$$

$$(h\partial)^2(f) = (h\partial)(h\partial(f)) = h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial(h)\partial + 1h^2\partial^2$$

$$(h\partial)^3(f) = (h\partial)(h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)) =$$

$$= h(\partial(h))^2\partial(f) + h^2\partial^2(h)\partial(f) + 3h^2\partial(h)\partial^2(f) + h^3\partial^3(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h(\partial(h))^2\partial + 1h^2\partial^2(h)\partial + 3h^2\partial(h)\partial^2 + 1h^3\partial^3$$

Precedentes

E. Briand, S. Lopes, M. Rosas

$$(h\partial)^1(f) = (h\partial)(f) = h\partial(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial$$

$$(h\partial)^2(f) = (h\partial)(h\partial(f)) = h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial(h)\partial + 1h^2\partial^2$$

$$(h\partial)^3(f) = (h\partial)(h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)) =$$
$$= h(\partial(h))^2\partial(f) + h^2\partial^2(h)\partial(f) + 3h^2\partial(h)\partial^2(f) + h^3\partial^3(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h(\partial(h))^2\partial + 1h^2\partial^2(h)\partial + 3h^2\partial(h)\partial^2 + 1h^3\partial^3$$

$$(h\partial)^1(f) = (h\partial)(f) = h\partial(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial$$

$$(h\partial)^2(f) = (h\partial)(h\partial(f)) = h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h\partial(h)\partial + 1h^2\partial^2$$

$$(h\partial)^3(f) = (h\partial)(h\partial(h)\partial(f) + h^2\partial^2(f)) =$$
$$= h(\partial(h))^2\partial(f) + h^2\partial^2(h)\partial(f) + 3h^2\partial(h)\partial^2(f) + h^3\partial^3(f)$$

$$\rightarrow \quad 1h(\partial(h))^2\partial + 1h^2\partial^2(h)\partial + 3h^2\partial(h)\partial^2 + 1h^3\partial^3$$

- Derivada usual:

$$\partial(f) = \lim_{q \to 1} \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

- Derivada de Jackson:

$$\partial_q(f) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

- <u>Derivada usual:</u>

$$\partial(f) = \lim_{q \to 1} \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

- <u>Derivada de Jackson:</u>

$$\partial_q(f) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

- Derivada usual:

$$\partial(f) = \lim_{q \to 1} \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

- Derivada de Jackson:

$$\partial_q(f) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

Generalização

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b) \quad \to \quad \partial_q(ab) = \partial_q(a)b + \sigma_q(a)\partial_q(b)$$

$$\partial_q(\sigma_q(a)) = q \cdot \sigma_q(\partial_q(a))$$

$$(h\partial_q)^n = ??$$

Generalização

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b) \quad \to \quad \partial_q(ab) = \partial_q(a)b + \sigma_q(a)\partial_q(b)$$

$$\partial_q(\sigma_q(a)) = q \cdot \sigma_q(\partial_q(a))$$

$$(h\partial_q)^n = ??$$

Generalização

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b) \quad \rightarrow \quad \partial_q(ab) = \partial_q(a)b + \sigma_q(a)\partial_q(b)$$

$$\partial_q(\sigma_q(a)) = q \cdot \sigma_q(\partial_q(a))$$

$$(h\partial_q)^n = ??$$

Generalização

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b) \quad \to \quad \partial_q(ab) = \partial_q(a)b + \sigma_q(a)\partial_q(b)$$

$$\partial_q(\sigma_q(a)) = q \cdot \sigma_q(\partial_q(a))$$

$$(h\partial_q)^n = ??$$

Generalização

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b) \quad \rightarrow \quad \partial_q(ab) = \partial_q(a)b + \sigma_q(a)\partial_q(b)$$

$$\partial_q(\sigma_q(a)) = q \cdot \sigma_q(\partial_q(a))$$

$$(h\partial_q)^n = ??$$

n pequeno

$$(h\partial)^1 = 1h\partial$$

$$(h\partial)^2 = (h\partial)(h\partial) = 1h\partial(h)\partial + 1h\sigma(h)\partial^2$$

$$(h\partial)^3 = (h\partial(h)\partial + h\sigma(h)\partial^2)(h\partial) =$$

$$= 1h\sigma(h)\partial^2(h)\partial + 1h(\partial(h))^2\partial + 1h\partial(h)\sigma(h)\partial^2 +$$

$$+(1+q)h\sigma(h)\sigma(\partial(h))\partial^2 + 1h\sigma(h)\sigma^2(h)\partial^3$$

n pequeno

$$(h\partial)^1 = {\color{red}1} h\partial$$

$$(h\partial)^2 = (h\partial)(h\partial) = {\color{red}1} h\partial(h)\partial + {\color{red}1} h\sigma(h)\partial^2$$

$$(h\partial)^3 = (h\partial(h)\partial + h\sigma(h)\partial^2)(h\partial) =$$

$$= {\color{red}1} h\sigma(h)\partial^2(h)\partial + {\color{red}1} h(\partial(h))^2\partial + {\color{red}1} h\partial(h)\sigma(h)\partial^2 +$$

$$+{\color{red}(1+q)} h\sigma(h)\sigma(\partial(h))\partial^2 + {\color{red}1} h\sigma(h)\sigma^2(h)\partial^3$$

n pequeno

$$(h\partial)^1 = 1 h\partial$$

$$(h\partial)^2 = (h\partial)(h\partial) = 1 h\partial(h)\partial + 1 h\sigma(h)\partial^2$$

$$(h\partial)^3 = (h\partial(h)\partial + h\sigma(h)\partial^2)(h\partial) =$$

$$= 1 h\sigma(h)\partial^2(h)\partial + 1 h(\partial(h))^2\partial + 1 h\partial(h)\sigma(h)\partial^2 +$$

$$+ (1+q) h\sigma(h)\sigma(\partial(h))\partial^2 + 1 h\sigma(h)\sigma^2(h)\partial^3$$

n pequeno

$$(h\partial)^1 = 1h\partial$$

$$(h\partial)^2 = (h\partial)(h\partial) = 1h\partial(h)\partial + 1h\sigma(h)\partial^2$$

$$(h\partial)^3 = (h\partial(h)\partial + h\sigma(h)\partial^2)(h\partial) =$$

$$= 1h\sigma(h)\partial^2(h)\partial + 1h(\partial(h))^2\partial + 1h\partial(h)\sigma(h)\partial^2 +$$
$$+(1+q)h\sigma(h)\sigma(\partial(h))\partial^2 + 1h\sigma(h)\sigma^2(h)\partial^3$$

Coeficiente Binomial

$\binom{m}{n} \in \mathbb{N}_0$ representa o número de sequências binárias de comprimento m em que n dos algarismos são iguais a 1.

Coeficiente Gaussiano

$\binom{m}{n}_q \in \mathbb{Z}[q]$ é tal que o coeficiente de q^k representa o número de tais sequências binárias com k **inversões**, sendo uma inversão um par de algarismos da sequência em que o mais à esquerda é 1 e o mais à direita é 0.

Coeficiente Binomial

$\binom{m}{n} \in \mathbb{N}_0$ representa o número de sequências binárias de comprimento m em que n dos algarismos são iguais a 1.

Coeficiente Gaussiano

$\binom{m}{n}_q \in \mathbb{Z}[q]$ é tal que o coeficiente de q^k representa o número de tais sequências binárias com k **inversões**, sendo uma inversão um par de algarismos da sequência em que o mais à esquerda é 1 e o mais à direita é 0.

Coeficiente Binomial

$\binom{m}{n} \in \mathbb{N}_0$ representa o número de sequências binárias de comprimento m em que n dos algarismos são iguais a 1.

Coeficiente Gaussiano

$\binom{m}{n}_q \in \mathbb{Z}[q]$ é tal que o coeficiente de q^k representa o número de tais sequências binárias com k **inversões**, sendo uma inversão um par de algarismos da sequência em que o mais à esquerda é 1 e o mais à direita é 0.

- Se $m = 3$, $n = 2$, há 3 sequências:

$$011, 101, 110$$

- Logo, $\binom{3}{2} = 3$.

- A primeira tem 0 inversões, a segunda tem 1 inversão e a terceira tem 2 inversões:

$$\binom{3}{2}_q = 1 \cdot q^0 + 1 \cdot q^1 + 1 \cdot q^2 = 1 + q + q^2.$$

Coeficientes Gaussianos

Exemplo

- Se $m = 3$, $n = 2$, há 3 sequências:

$$011,\ 101,\ 110$$

- Logo, $\binom{3}{2} = 3$.

- A primeira tem 0 inversões, a segunda tem 1 inversão e a terceira tem 2 inversões:

$$\binom{3}{2}_q = 1 \cdot q^0 + 1 \cdot q^1 + 1 \cdot q^2 = 1 + q + q^2.$$

- Se $m = 3$, $n = 2$, há 3 sequências:

$$011,\ 101,\ 110$$

- Logo, $\binom{3}{2} = 3$.

- A primeira tem 0 inversões, a segunda tem 1 inversão e a terceira tem 2 inversões:

$$\binom{3}{2}_q = 1 \cdot q^0 + 1 \cdot q^1 + 1 \cdot q^2 = 1 + q + q^2.$$

- Se $m = 3$, $n = 2$, há 3 sequências:

$$011, \; 101, \; 110$$

- Logo, $\binom{3}{2} = 3$.

- A primeira tem 0 inversões, a segunda tem 1 inversão e a terceira tem 2 inversões:

$$\binom{3}{2}_q = 1 \cdot q^0 + 1 \cdot q^1 + 1 \cdot q^2 = 1 + q + q^2.$$

- Fórmula fechada:

$$\binom{m}{n}_q = \frac{[m]_q!}{[n]_q![m-n]_q!} = \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q^{m-n+1})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q)}$$

- Fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} \binom{m}{0}_q = \binom{m}{m}_q = 1, & \forall m \geq 0 \\ \binom{m}{n}_q = \binom{m-1}{n}_q + q^{m-n}\binom{m-1}{n-1}_q, & \forall m > n > 0 \end{cases}$$

- Os coeficientes gaussianos são **palindrómicos** e têm **termo independente igual a 1**.

Definições

Dado $n \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{N}_0^n$, temos as seguintes definições:

- $|\lambda| := n$ é o **comprimento** de λ;
- $s_k^\lambda := \sum_{i=0}^k \lambda_i$, $\forall k \geq 0$; definimos, ainda, $s_{-1}^\lambda := 0$;
- Escrevemos
$$\lambda \vDash S$$
quando S é a soma das entradas de λ, e dizemos que λ é uma **pseudo-composição** de S;
- Se $s_k^\lambda \leq k$, $\forall k \geq 0$, dizemos que λ é **normal**.

Pseudo-composições

Exemplo

Seja $n = 5$ e $\lambda = (0, 0, 2, 0, 2)$. Então:

- λ tem comprimento 5: $|\lambda| = 5$;
-
    - $s_{-1}^{\lambda} = 0$;
    - $s_0^{\lambda} = 0$;
    - $s_1^{\lambda} = 0 + 0 = 0$;
    - $s_2^{\lambda} = 0 + 0 + 2 = 2$;
    - $s_3^{\lambda} = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$;
    - $s_4^{\lambda} = 0 + 0 + 2 + 0 + 2 = 4$;
- λ é normal.

Seja $n = 5$ e $\lambda = (0, 0, 2, 0, 2)$. Então:

- λ tem comprimento 5: $|\lambda| = 5$;
-
  - $s^\lambda_{-1} = 0$;
  - $s^\lambda_0 = 0$;
  - $s^\lambda_1 = 0 + 0 = 0$;
  - $s^\lambda_2 = 0 + 0 + 2 = 2$;
  - $s^\lambda_3 = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$;
  - $s^\lambda_4 = 0 + 0 + 2 + 0 + 2 = 4$;
- λ é normal.

Pseudo-composições

Exemplo

Seja $n = 5$ e $\lambda = (0, 0, 2, 0, 2)$. Então:

- λ tem comprimento 5: $|\lambda| = 5$;
-
    - $s_{-1}^{\lambda} = 0$;
    - $s_0^{\lambda} = 0$;
    - $s_1^{\lambda} = 0 + 0 = 0$;
    - $s_2^{\lambda} = 0 + 0 + 2 = 2$;
    - $s_3^{\lambda} = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$;
    - $s_4^{\lambda} = 0 + 0 + 2 + 0 + 2 = 4$;
- λ é normal.

Pseudo-composições

Exemplo

Seja $n = 5$ e $\lambda = (0, 0, 2, 0, 2)$. Então:

- λ tem comprimento 5: $|\lambda| = 5$;
-
  - $s^{\lambda}_{-1} = 0$;
  - $s^{\lambda}_{0} = 0$;
  - $s^{\lambda}_{1} = 0 + 0 = 0$;
  - $s^{\lambda}_{2} = 0 + 0 + 2 = 2$;
  - $s^{\lambda}_{3} = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$;
  - $s^{\lambda}_{4} = 0 + 0 + 2 + 0 + 2 = 4$;
- λ é normal.

Seja $n = 5$ e $\lambda = (0, 0, 2, 0, 2)$. Então:

- λ tem comprimento 5: $|\lambda| = 5$;
-
    - $s^{\lambda}_{-1} = 0$;
    - $s^{\lambda}_{0} = 0$;
    - $s^{\lambda}_{1} = 0 + 0 = 0$;
    - $s^{\lambda}_{2} = 0 + 0 + 2 = 2$;
    - $s^{\lambda}_{3} = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$;
    - $s^{\lambda}_{4} = 0 + 0 + 2 + 0 + 2 = 4$;
- λ é normal.

Definições

- Dados inteiros não negativos $n \geq \ell$, definimos o conjunto $\Gamma_{n,\ell}$ dos tuplos normais de comprimento n e soma $n-\ell$:
$$\Gamma_{n,\ell} := \{\lambda : \lambda \vDash n-\ell,\ |\lambda| = n,\ \lambda \text{ é normal}\}.$$
- Definimos, ainda, o conjunto Γ_n dos tuplos normais de comprimento n:
$$\Gamma_n := \{\lambda : |\lambda| = n,\ \lambda \text{ é normal}\} = \bigcup_{\ell=0}^{n} \Gamma_{n,\ell}.$$

Forma normal de $(h\partial_q)^n$

Teorema

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$(h\partial_q)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{\lambda \in \Gamma_{n,\ell}} c_\lambda(q) \cdot h^{[\lambda]} \partial_q^{\ell},$$

onde

$$h^{[\lambda]} = \prod_{k=0}^{|\lambda|-1} \sigma^{k-s_k^\lambda}\left(\partial_q^{\lambda_k}(h)\right)$$

e

$$c_\lambda(q) = \prod_{k=0}^{|\lambda|-1} \binom{k-s_{k-1}^\lambda}{\lambda_k}_q .$$

Forma normal de $(h\partial_q)^n$

Teorema

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$(h\partial_q)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{\lambda \in \Gamma_{n,\ell}} c_\lambda(q) \cdot h^{[\lambda]} \partial_q^\ell,$$

onde

$$h^{[\lambda]} = \prod_{k=0}^{|\lambda|-1} \sigma^{k-s_k^\lambda}(\partial_q^{\lambda_k}(h))$$

e

$$c_\lambda(q) = \prod_{k=0}^{|\lambda|-1} \binom{k - s_{k-1}^\lambda}{\lambda_k}_q.$$

Definição

Dado $n \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{N}_0^n$, dizemos que λ é *d*-**normal** se $s_k^\lambda \leq dk$, $\forall k \geq 0$.

Definição

Dados inteiros não negativos $n \geq \ell$ e um inteiro positivo d, definimos o conjunto $\Gamma_{n,\ell}^d$ dos tuplos d-normais de comprimento n e soma $n - \ell$:

$$\Gamma_{n,\ell}^d := \{\lambda : \lambda \vDash n - \ell,\ |\lambda| = n,\ \lambda \text{ é } d\text{-normal}\}.$$

Teorema

Sejam n um inteiro não negativo e d um inteiro positivo. Então,

$$(h\partial_q^d)^n = \sum_{\ell=0}^{nd} \sum_{\lambda \in \Gamma_{n,\ell}^d} c_\lambda^d(q) \cdot h^{[\lambda]} \partial_q^\ell,$$

onde

$$h^{[\lambda]} = \prod_{k=0}^{|\lambda|-1} \sigma^{kd - s_k^\lambda}(\partial_q^{\lambda_k}(h))$$

e

$$c_\lambda^d(q) = \prod_{k=0}^{|\lambda|-1} \binom{kd - s_{k-1}^\lambda}{\lambda_k}_q.$$

Estudo combinatório dos coeficientes $c_\lambda(q)$

Quantas pseudo-composições normais existem?

Proposição

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$|\Gamma_n| = C_n,$$

onde $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ é o n-ésimo número de Catalan.

- **Pergunta Bónus:** Quantas pseudo-composições d-normais existem?

Quantas pseudo-composições normais existem?

Proposição

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$|\Gamma_n| = C_n,$$

onde $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ é o n-ésimo número de Catalan.

- **Pergunta Bónus:** Quantas pseudo-composições d-normais existem?

Quantas pseudo-composições normais existem?

Proposição

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$|\Gamma_n| = C_n,$$

onde $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ é o n-ésimo número de Catalan.

- **Pergunta Bónus:** Quantas pseudo-composições d-normais existem?

Números de Catalan

- Fórmula fechada:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- Interpretação combinatória: C_n = número de **Caminhos de Dyck** num quadriculado $n \times n$.

- Fórmula fechada:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

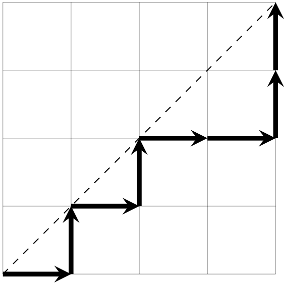
- Interpretação combinatória: C_n = número de **Caminhos de Dyck** num quadriculado $n \times n$.

Números de Catalan

- Fórmula fechada:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- Interpretação combinatória: $C_n =$ número de **Caminhos de Dyck** num quadriculado $n \times n$.



Proposição

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_n} c_\lambda(1) = n!$$

- Que objetos combinatórios são contados pelo fatorial?

Proposição

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_n} c_\lambda(1) = n!$$

- Que objetos combinatórios são contados pelo fatorial?

Proposição

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_n} c_\lambda(1) = n!$$

- Que objetos combinatórios são contados pelo fatorial?

Árvores Crescentes

Definição

Uma **árvore crescente** com $n+1$ vértices é uma árvore com raiz nos vértices $0, \ldots, n$ tal que $\text{pai}(i) < i$, $\forall i \in [n]$.

$n = 8$:

Definição

Uma **árvore crescente** com $n+1$ vértices é uma árvore com raiz nos vértices $0, \ldots, n$ tal que $\text{pai}(i) < i$, $\forall i \in [n]$.

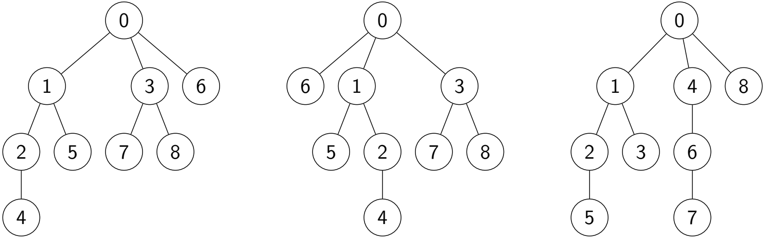
$n = 8$:

Árvores Crescentes

Definição

Uma **árvore crescente** com $n+1$ vértices é uma árvore com raiz nos vértices $0, \ldots, n$ tal que $\text{pai}(i) < i$, $\forall i \in [n]$.

<u>$n = 8$:</u>



Funções sub-diagonais

Definição

Uma **função sub-diagonal** de domínio $[n]$ é uma função $f : [n] \to \{0\} \cup [n]$ tal que $f(i) < i$, $\forall i \in [n]$.

$n = 8$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	0	2	1	0	3	3

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	1	0	2	4	6	0

Funções sub-diagonais

Definição

Uma **função sub-diagonal** de domínio $[n]$ é uma função $f : [n] \to \{0\} \cup [n]$ tal que $f(i) < i$, $\forall i \in [n]$.

$n = 8$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	0	2	1	0	3	3

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	1	0	2	4	6	0

Definição

Uma **função sub-diagonal** de domínio $[n]$ é uma função $f : [n] \to \{0\} \cup [n]$ tal que $f(i) < i$, $\forall i \in [n]$.

$\underline{n = 8:}$

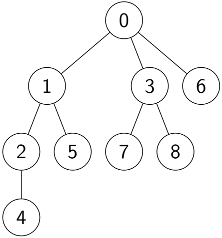
n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	0	2	1	0	3	3

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	1	0	2	4	6	0

Bijeção entre árvores crescentes e funções sub-diagonais

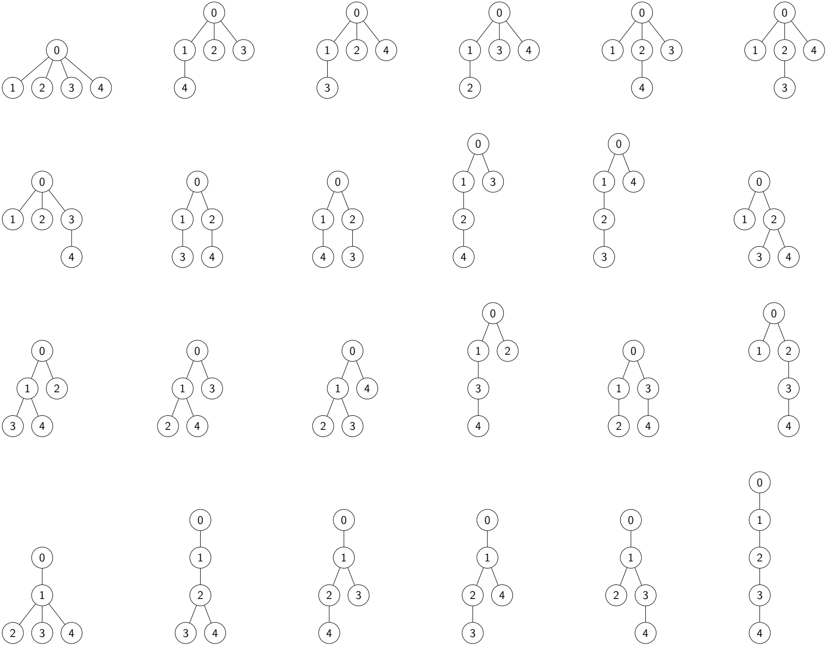
- Existe uma bijeção entre o conjunto da árvores crescentes com $n+1$ vértices e o conjunto das funções sub-diagonais de domínio $[n]$, que associa a cada árvore a função que envia cada vértice (não raiz) no seu pai.

$\underline{n = 8 :}$



$\longrightarrow$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	0	2	1	0	3	3



Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda \in \Gamma_n$, e seja T_λ o conjunto das árvores crescentes com $n+1$ vértices tais que, para cada $i \in [n]$, o vértice i tem λ_{n-i} filhos. Então,

$$c_\lambda(1) = |T_\lambda|.$$

$\lambda = (0, 0, 1, 1)$

$(4, 3, 2, 1)$

$c_\lambda(1) = 4$

Proposição

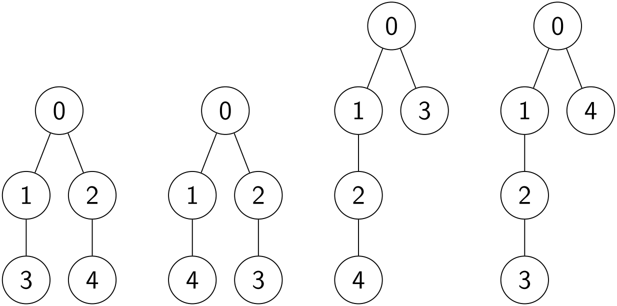
Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda \in \Gamma_n$, e seja T_λ o conjunto das árvores crescentes com $n+1$ vértices tais que, para cada $i \in [n]$, o vértice i tem λ_{n-i} filhos. Então,

$$c_\lambda(1) = |T_\lambda|.$$

$$\lambda = (0, 0, 1, 1)$$

$$(4\ 3\ 2\ 1)$$

$$c_\lambda(1) = 4$$



Proposição (Dual)

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda \in \Gamma_n$, e seja F_λ o conjunto das funções sub-diagonais, f, de domínio $[n]$, tais que, para cada $i \in [n]$, $\left|f^{-1}(\{i\})\right| = \lambda_{n-i}$. Então,

$$c_\lambda(1) = |F_\lambda|.$$

$\lambda = (0, 0, 1, 1)$

$(4\ 3\ 2\ 1)$

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	0	1	2

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	0	2

$c_\lambda(1) = 4$

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	0	2	1

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	0

Proposição (Dual)

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda \in \Gamma_n$, e seja F_λ o conjunto das funções sub-diagonais, f, de domínio $[n]$, tais que, para cada $i \in [n]$, $\left|f^{-1}(\{i\})\right| = \lambda_{n-i}$. Então,

$$c_\lambda(1) = |F_\lambda|.$$

$\lambda = (0, 0, 1, 1)$

$(4\ 3\ 2\ 1)$

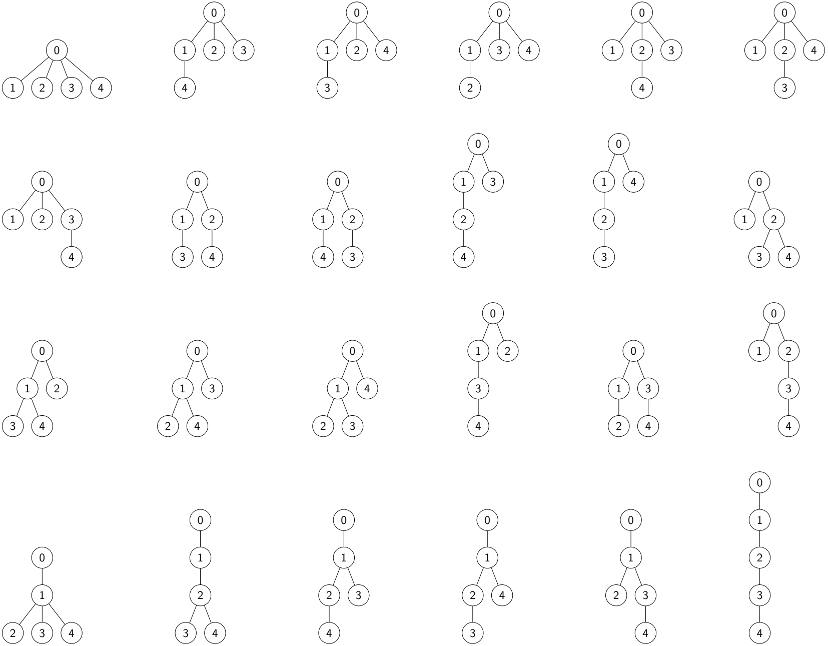
n	1	2	3	4
$f(n)$	0	0	1	2

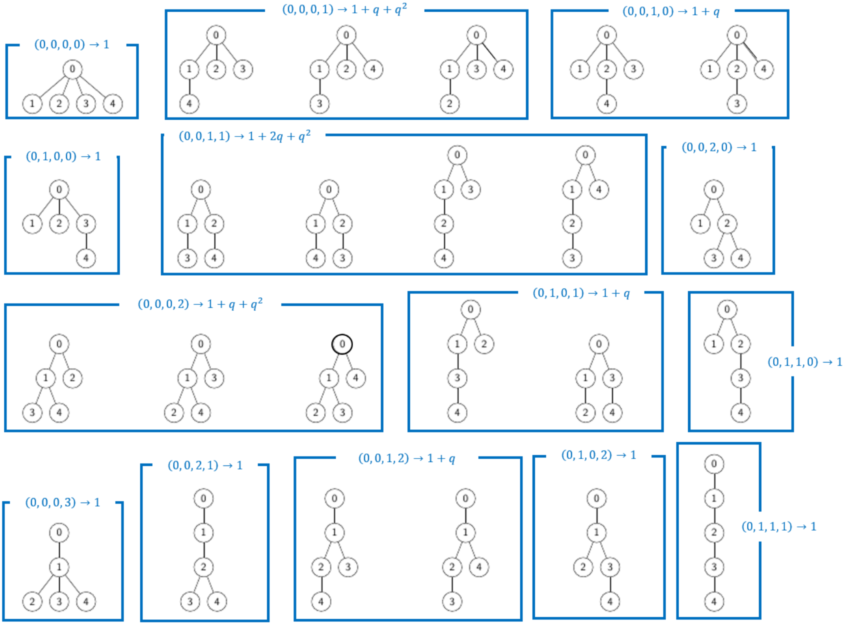
n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	0	2

$c_\lambda(1) = 4$

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	0	2	1

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	0




$(0,0,0,0) \to 1$
$(0,0,0,1) \to 1+q+q^2$
$(0,0,1,0) \to 1+q$
$(0,1,0,0) \to 1$
$(0,0,1,1) \to 1+2q+q^2$
$(0,0,2,0) \to 1$
$(0,0,0,2) \to 1+q+q^2$
$(0,1,0,1) \to 1+q$
$(0,1,1,0) \to 1$
$(0,0,0,3) \to 1$
$(0,0,2,1) \to 1$
$(0,0,1,2) \to 1+q$
$(0,1,0,2) \to 1$
$(0,1,1,1) \to 1$

Inversões

Definição

Dada uma função $f : [n] \to \{0\} \cup [n]$, uma **inversão** é um par $(a, b) \in [n] \times [n]$ tal que $a < b$ e $f(a) > f(b)$.

Definição (Dual)

Dada uma árvore crescente com $n + 1$ vértices, uma **inversão** é um par $(a, b) \in [n] \times [n]$ tal que $a < b$ e $\text{pai}(a) > \text{pai}(b)$.

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	0

Inversões

Definição

Dada uma função $f : [n] \to \{0\} \cup [n]$, uma **inversão** é um par $(a, b) \in [n] \times [n]$ tal que $a < b$ e $f(a) > f(b)$.

Definição (Dual)

Dada uma árvore crescente com $n + 1$ vértices, uma **inversão** é um par $(a, b) \in [n] \times [n]$ tal que $a < b$ e $\text{pai}(a) > \text{pai}(b)$.

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	0

Inversões

Definição

Dada uma função $f : [n] \to \{0\} \cup [n]$, uma **inversão** é um par $(a, b) \in [n] \times [n]$ tal que $a < b$ e $f(a) > f(b)$.

Definição (Dual)

Dada uma árvore crescente com $n + 1$ vértices, uma **inversão** é um par $(a, b) \in [n] \times [n]$ tal que $a < b$ e $\text{pai}(a) > \text{pai}(b)$.

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	0

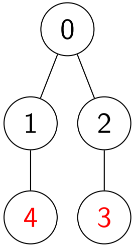
Inversões

Definição

Dada uma função $f : [n] \to \{0\} \cup [n]$, uma **inversão** é um par $(a, b) \in [n] \times [n]$ tal que $a < b$ e $f(a) > f(b)$.

Definição (Dual)

Dada uma árvore crescente com $n + 1$ vértices, uma **inversão** é um par $(a, b) \in [n] \times [n]$ tal que $a < b$ e $\text{pai}(a) > \text{pai}(b)$.



n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	0

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \Gamma_n$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Então, $c_\lambda[k]$ é o número de funções em F_λ com k inversões.

$\lambda = (0, 0, 1, 1)$

$(4\ 3\ 2\ 1)$

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	0	1	2

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	0	2

$c_\lambda(q) =$

$q^0 + 2q^1 + q^2$

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	0	2	1

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	0

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \Gamma_n$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Então, $c_\lambda[k]$ é o número de funções em F_λ com k inversões.

$\lambda = (0, 0, 1, 1)$

$(4\ 3\ 2\ 1)$

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	0	1	2

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	0	2

$c_\lambda(q) =$
$q^0 + 2q^1 + q^2$

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	0	2	1

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	0

Proposição (Dual)

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \Gamma_n$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Então, $c_\lambda[k]$ é o número de árvores em T_λ com k inversões.

$\lambda = (0, 0, 1, 1)$

$(4, 3, 2, 1)$

$c_\lambda(q) =$

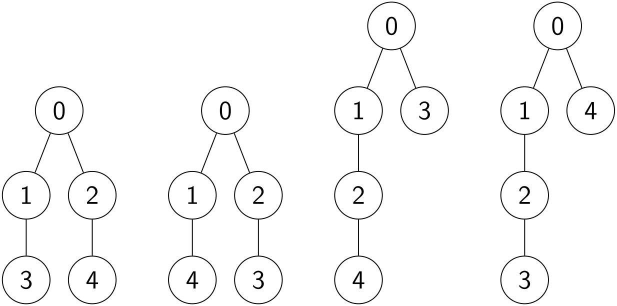
$q^0 + 2q^1 + q^2$

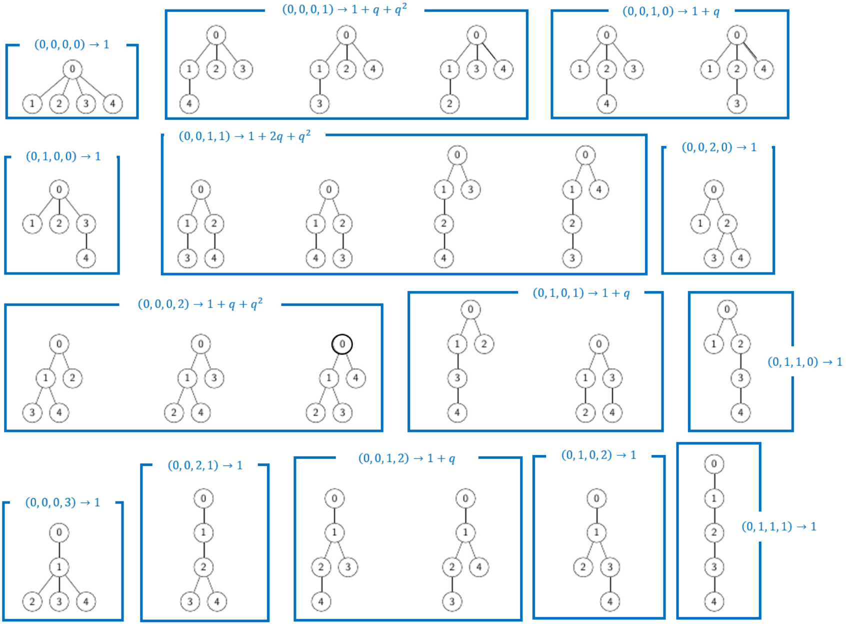
Proposição (Dual)

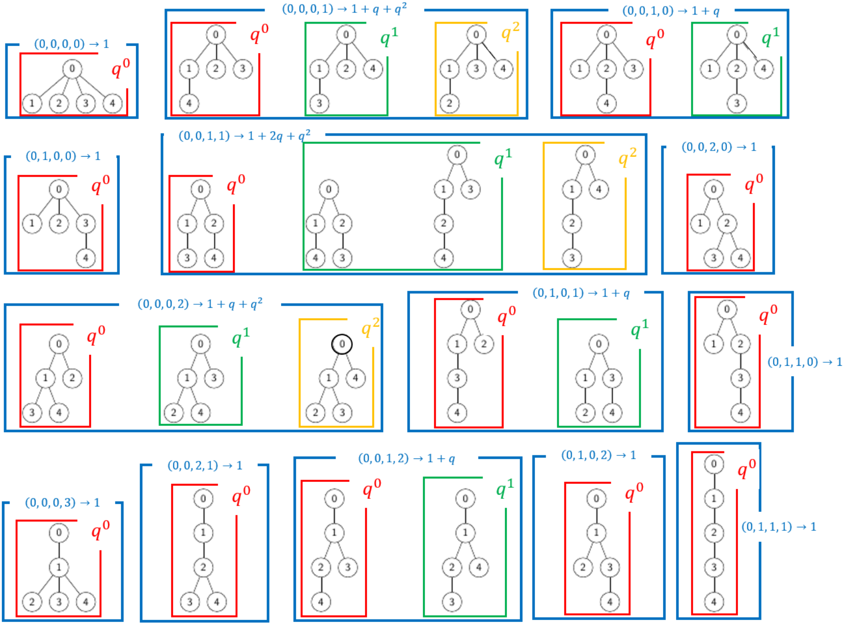
Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \Gamma_n$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Então, $c_\lambda[k]$ é o número de árvores em T_λ com k inversões.

$$\lambda = (0, 0, 1, 1)$$
$$(4\ \ 3\ \ 2\ \ 1)$$

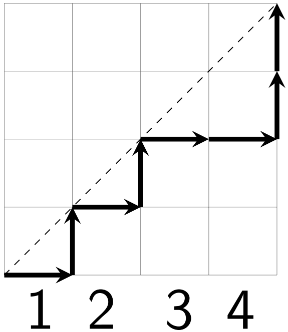
$$c_\lambda(q) = q^0 + 2q^1 + q^2$$




$(0,0,0,0) \to 1$
$(0,0,0,1) \to 1 + q + q^2$
$(0,0,1,0) \to 1 + q$
$(0,1,0,0) \to 1$
$(0,0,1,1) \to 1 + 2q + q^2$
$(0,0,2,0) \to 1$
$(0,0,0,2) \to 1 + q + q^2$
$(0,1,0,1) \to 1 + q$
$(0,1,1,0) \to 1$
$(0,0,0,3) \to 1$
$(0,0,2,1) \to 1$
$(0,0,1,2) \to 1 + q$
$(0,1,0,2) \to 1$
$(0,1,1,1) \to 1$


$(0,0,0,0) \to 1$
$(0,0,0,1) \to 1+q+q^2$
$(0,0,1,0) \to 1+q$
$(0,1,0,0) \to 1$
$(0,0,1,1) \to 1+2q+q^2$
$(0,0,2,0) \to 1$
$(0,0,0,2) \to 1+q+q^2$
$(0,1,0,1) \to 1+q$
$(0,1,1,0) \to 1$
$(0,0,0,3) \to 1$
$(0,0,2,1) \to 1$
$(0,0,1,2) \to 1+q$
$(0,1,0,2) \to 1$
$(0,1,1,1) \to 1$
q^0
q^1
q^2

Quantas pseudo-composições normais existem?



$\rightarrow$

n	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	2	2