Aspetos Algébricos da Lógica

Luís Dias

3 Setembro 2020

Lógica Clássica

Sintaxe e Semântica

- Variáveis Proposicionais: $p, q, \ldots$;
- Conetivos: $\wedge, \vee, \neg, \perp, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- Pontuação: Parêntesis (,).

Sintaxe e Semântica

- Variáveis Proposicionais: $p, q, \ldots;$
- Conetivos: $\wedge, \vee, \neg, \bot, \rightarrow, \leftrightarrow;$
- Pontuação: Parêntesis $(,)$.

Fórmulas: $\varphi, \psi, \sigma, \ldots$
Conjuntos de Fórmulas: $\Gamma, \Delta, \ldots$

Sintaxe e Semântica

- Variáveis Proposicionais: $p, q, \ldots$;
- Conetivos: $\wedge, \vee, \neg, \perp, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- Pontuação: Parêntesis $(,)$.

Fórmulas: $\varphi, \psi, \sigma, \ldots$
Conjuntos de Fórmulas: $\Gamma, \Delta, \ldots$
Exemplos:

- $\neg(p \wedge q) \vee p$;
- $(\perp \wedge p) \rightarrow p$.

O conjunto das fórmulas é denotado por $\mathcal{F}$.

Sintaxe e Semântica

- Variáveis Proposicionais: $p, q, \ldots$;
- Conetivos: $\wedge, \vee, \neg, \perp, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- Pontuação: Parêntesis $(,)$.

Fórmulas: $\varphi, \psi, \sigma, \ldots$
Conjuntos de Fórmulas: $\Gamma, \Delta, \ldots$
Exemplos:

- $\neg(p \wedge q) \vee p$;
- $(\perp \wedge p) \rightarrow p$.

O conjunto das fórmulas é denotado por $\mathcal{F}$.

x	$v_\neg(x)$
0	1
1	0

x	y	$v_\vee(x,y)$	$v_\wedge(x,y)$	$v_\rightarrow(x,y)$	$v_\leftrightarrow(x,y)$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Para atribuir valor lógico às fórmulas utiliza-se uma função chamada valoração definida da seguinte forma:

Definição

Uma função $v : \mathcal{F}_p \to \{0, 1\}$ *diz-se valoração, se satisfaz as seguintes condições:*

- $v(\perp) = 0$
- $v(\neg\varphi) = v_{\neg}(v(\varphi))$, *para todo* $\varphi \in \mathcal{F}_p$
- $v(\varphi\Box\psi) = v_{\Box}(v(\varphi), v(\psi))$, *para todo* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_p$, *com* $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

Um dos dos objetivos principais da lógica é estudar a relação entre fórmulas tendo em conta as funções de verdade.

Definição

Sejam $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Diz-se que φ é consequência lógica de Γ , e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, se, para toda v valoração:

$$\textit{Se para todo } \psi \in \Gamma, v(\psi) = 1, \textit{ então } v(\varphi) = 1$$

Um dos dos objetivos principais da lógica é estudar a relação entre fórmulas tendo em conta as funções de verdade.

Definição

Sejam $\varphi \in \mathcal{F}$ *e* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$*. Diz-se que* φ *é consequência lógica de* Γ *, e escreve-se* $\Gamma \models \varphi$*, se, para toda v valoração:*

$$\textit{Se para todo } \psi \in \Gamma, \mathsf{v}(\psi) = 1, \textit{ então } \mathsf{v}(\varphi) = 1$$

As funções de verdade podem ser vistas como operações em $\{0, 1\}$. Reparando nas funções $v_\wedge$ e $v_\vee$ percebemos que estas são exatamente as funções de ínfimo e supremo do conjunto $\{0, 1\}$.

Álgebras de Boole

Definição

Seja $(R, \sqcap, \sqcup)$ *um reticulado limitado com mínimo 0 e máximo 1 e* $a, b \in R$. *O elemento* b *diz-se complemento de* a *se* $a \sqcap b = 0$ *e* $a \sqcup b = 1$.

Álgebras de Boole

Definição

Seja $(R, \sqcap, \sqcup)$ *um reticulado limitado com mínimo 0 e máximo 1 e* $a, b \in R$. *O elemento* b *diz-se complemento de* a *se* $a \sqcap b = 0$ *e* $a \sqcup b = 1$.

Definição

Um reticulado limitado $(R, \sqcap, \sqcup)$ *diz-se:*

- *complementado, se todo o elemento tem complemento;*
- *distributivo, se* $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap c) \sqcup (a \sqcap b)$ *para todo* $a, b, c \in R$.

Álgebras de Boole

Definição

Seja $(R, \sqcap, \sqcup)$ *um reticulado limitado com mínimo 0 e máximo 1 e* $a, b \in R$*. O elemento b diz-se complemento de a se* $a \sqcap b = 0$ *e* $a \sqcup b = 1$*.*

Definição

Um reticulado limitado $(R, \sqcap, \sqcup)$ *diz-se:*

- *complementado, se todo o elemento tem complemento;*
- *distributivo, se* $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap c) \sqcup (a \sqcap b)$ *para todo* $a, b, c \in R$*.*

Definição

Um reticulado limitado, complementado e distributivo diz-se uma álgebra de Boole.

Exemplo:

- $(\{0,1\}, v_\wedge, v_\vee, v_\neg, 0, 1)$ chamada a álgebra dos valores lógicos que se denota por $\mathbb{2}$ é uma álgebra de Boole.

Exemplo:

- $(\{0,1\}, v_\wedge, v_\vee, v_\neg, 0, 1)$ chamada a álgebra dos valores lógicos que se denota por $\mathbb{2}$ é uma álgebra de Boole.

Definição (Generalização do conceito de valoração)

Seja $\mathcal{B} = (B, \sqcap, \sqcup, \,', 0, 1)$ uma álgebra de Boole. Uma função $v : \mathcal{F} \to B$ diz-se $\mathcal{B}$-valoração se satisfaz as seguintes condições:

- $v(\bot) = 0$;
- $v(\neg\varphi) = v(\varphi)'$, *para todo* $\varphi \in \mathcal{F}$;
- $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \sqcap v(\psi)$, *para todo* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$;
- $v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \sqcup v(\psi)$, *para todo* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$;
- $v(\varphi \to \psi) = v(\varphi)' \sqcup v(\psi)$, *para todo* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$;
- $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = (v(\varphi) \sqcap v(\psi)) \sqcup (v(\varphi)' \sqcap v(\psi)')$, *para todo* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$.

Definição (Generalização do conceito de consequência lógica)

Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}$ *diz-se consequência de* Γ *numa álgebra de Boole* $\mathcal{B}$*, e escreve-se* $\Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi$*, se para qualquer* $\mathcal{B}$*-valoração v:*

$$\textit{Se para todo } \psi \in \Gamma, \mathsf{v}(\psi) = 1, \textit{ então } \mathsf{v}(\varphi) = 1$$

Definição (Generalização do conceito de consequência lógica)

Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}$ diz-se consequência de Γ numa álgebra de Boole $\mathcal{B}$, e escreve-se $\Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi$, se para qualquer $\mathcal{B}$-valoração v:

$$\textit{Se para todo } \psi \in \Gamma, \mathsf{v}(\psi) = 1, \textit{ então } \mathsf{v}(\varphi) = 1$$

Teorema

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}$,

$$\Gamma \models \varphi \quad \textit{se e só se} \quad \textit{para toda álgebra de Boole } \mathcal{B},\ \Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi$$

Definição (Generalização do conceito de consequência lógica)

Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}$ *diz-se consequência de* Γ *numa álgebra de Boole* $\mathcal{B}$*, e escreve-se* $\Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi$*, se para qualquer* $\mathcal{B}$*-valoração* v*:*

$$\textit{Se para todo } \psi \in \Gamma, v(\psi) = 1, \textit{ então } v(\varphi) = 1$$

Teorema

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}$*,*

$$\Gamma \models \varphi \quad \textit{se e só se} \quad \textit{para toda álgebra de Boole } \mathcal{B}, \ \Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi$$

Demonstração.

O sentido direto utiliza o Teorema dos Ideais Maximais. O sentido recíproco é imediato visto que a álgebra dos valores lógicos é uma álgebra de Boole. □

Álgebra de Lindenbaum

Definimos a relação de equivalência $\Leftrightarrow$ em $\mathcal{F}$ por

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \text{ se e só se } v(\varphi) = v(\psi) \text{ para toda valoração } v$$

Álgebra de Lindenbaum

Definimos a relação de equivalência $\Leftrightarrow$ em $\mathcal{F}$ por

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \text{ se e só se } v(\varphi) = v(\psi) \text{ para toda valoração } v$$

Consideramos o quociente com $\mathcal{F}$, $LA = \mathcal{F}/\Leftrightarrow$. Defina-se as seguintes operações em LA,

$$\begin{aligned} [\varphi] \sqcap [\psi] &= [\varphi \wedge \psi] \\ [\varphi] \sqcup [\psi] &= [\varphi \vee \psi] \\ [\varphi]' &= [\neg\varphi] \end{aligned}$$

Teorema

$(LA, \sqcap, \sqcup, ', [\bot], [\neg\bot])$ *é uma álgebra de Boole.*

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\Gamma \models_{2} \varphi} \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow, red] & \\
\boxed{\forall \mathcal{B}, \Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi} \arrow[rr, leftrightarrow, dotted] & & \boxed{\Gamma \vdash \varphi}
\end{tikzcd}
$$

Lógica Intuicionista

Introdução

- Na lógica clássica $p \vee \neg p$ é uma tautologia;
- A lógica clássica não tem carácter construtivo;

Este problema pode ser resolvido formalizando o conceito de prova e removendo a possibilidade de usar a redução ao absurdo como regra de inferência.

Com esta alteração algumas fórmulas deixam de ser tautologias e deixamos de ter a lei do terceiro excluído e a lei da dupla negação.

Sistema Formal

Definição

Um sequente é um um par ordenado de um subconjunto de $\mathcal{F}$ e uma fórmula, (Γ, φ), que se representará por $\Gamma \vdash \varphi$.

Vai-se usar Γ, Δ para denotar $\Gamma \cup \Delta$. Analogamente a notação Γ, φ denotará $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Sistema Formal

Definição

Um sequente é um um par ordenado de um subconjunto de $\mathcal{F}$ e uma fórmula, (Γ, φ), que se representará por $\Gamma \vdash \varphi$.

Vai-se usar Γ, Δ para denotar $\Gamma \cup \Delta$. Analogamente a notação Γ, φ denotará $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Definição

O conjunto das derivações (da lógica intuicionista) é o conjunto de árvores de sequentes geradas pelas regras de inferência da Tabela 1.

Sistema Formal

Definição

Um sequente é um um par ordenado de um subconjunto de $\mathcal{F}$ e uma fórmula, (Γ, φ), que se representará por $\Gamma \vdash \varphi$.

Vai-se usar Γ, Δ para denotar $\Gamma \cup \Delta$. Analogamente a notação Γ, φ denotará $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Definição

O conjunto das derivações (da lógica intuicionista) é o conjunto de árvores de sequentes geradas pelas regras de inferência da Tabela 1.

Definição

Um sequente $\Gamma \vdash \Delta$ diz-se derivável se existe uma derivação cuja raíz é esse sequente.

Tabela 1: Regras de Inferência

$$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ Ax \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\bot} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ E_{\neg}$$

$$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ I_{\to} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\to} \qquad \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_{\neg}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_{\wedge} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\wedge 1} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\wedge 2}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee 1} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi}\ I_{\vee 2} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ E_{\vee}$$

Álgebra de Lindenbaum

Estratégia: Estudar a álgebra de Lindenbaum.

Álgebra de Lindenbaum

Estratégia: Estudar a álgebra de Lindenbaum.
Fixamos um $\Gamma \in \mathcal{F}$ e definimos a relação de equivalência $\sim_\Gamma$ por,

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \to \varphi$$

Álgebra de Lindenbaum

Estratégia: Estudar a álgebra de Lindenbaum.
Fixamos um $\Gamma \in \mathcal{F}$ e definimos a relação de equivalência $\sim_\Gamma$ por,

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \text{ se e só se } \Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \to \varphi$$

Consideramos novamente $LA_\Gamma = \mathcal{F}/\sim_\Gamma$ e as operações:

$$[\varphi] \sqcap [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$
$$[\varphi] \sqcup [\psi] = [\varphi \vee \psi]$$

Álgebra de Lindenbaum

Estratégia: Estudar a álgebra de Lindenbaum.
Fixamos um $\Gamma \in \mathcal{F}$ e definimos a relação de equivalência $\sim_\Gamma$ por,

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \to \varphi$$

Consideramos novamente $LA_\Gamma = \mathcal{F}/\sim_\Gamma$ e as operações:

$$[\varphi] \sqcap [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$
$$[\varphi] \sqcup [\psi] = [\varphi \vee \psi]$$

Proposição

$(LA_\Gamma, \sqcap, \sqcup)$ é um reticulado limitado com máximo $[\neg\bot]$ (denotado por 1) e mínimo $[\bot]$ (denotado por 0).

Álgebra de Lindenbaum

Estratégia: Estudar a álgebra de Lindenbaum.
Fixamos um $\Gamma \in \mathcal{F}$ e definimos a relação de equivalência $\sim_\Gamma$ por,

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \to \varphi$$

Consideramos novamente $LA_\Gamma = \mathcal{F}/\sim_\Gamma$ e as operações:

$$[\varphi] \sqcap [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$
$$[\varphi] \sqcup [\psi] = [\varphi \vee \psi]$$

Proposição

$(LA_\Gamma, \sqcap, \sqcup)$ *é um reticulado limitado com máximo* $[\neg\bot]$ *(denotado por 1) e mínimo* $[\bot]$ *(denotado por 0).*

Temos sempre $[\neg\varphi] \sqcap [\varphi] = 0$ mas nem sempre $[\varphi] \sqcup [\neg\varphi] = 1$.

Álgebra de Heyting

Definição

Seja $(R, \sqcap, \sqcup)$ *um reticulado e* $a, b \in R$*. Um elemento diz-se pseudo complemento de* a *em relação a* b*, e representa-se por* $a \Rightarrow b$*, se e só se é o maior* $c \in R$ *tal que* $a \sqcap c \leq b$*.*

Álgebra de Heyting

Definição

Seja $(R, \sqcap, \sqcup)$ *um reticulado e* $a, b \in R$. *Um elemento diz-se pseudo complemento de* a *em relação a* b, *e representa-se por* $a \Rightarrow b$, *se e só se é o maior* $c \in R$ *tal que* $a \sqcap c \leq b$.

Definição

Um tuplo $\mathcal{H} = (H, \sqcap, \sqcup, \Rightarrow, 0, 1)$ *diz-se álgebra de Heyting se:*

- $(H, \sqcap, \sqcup)$ *é um reticulado distributivo com máximo 1 e mínimo 0;*
- *Para todo* $a, b \in H$, *existe* $a \Rightarrow b$.

Álgebra de Heyting

Definição

Seja $(R, \sqcap, \sqcup)$ *um reticulado e* $a, b \in R$. *Um elemento diz-se pseudo complemento de* a *em relação a* b, *e representa-se por* $a \Rightarrow b$, *se e só se é o maior* $c \in R$ *tal que* $a \sqcap c \leq b$.

Definição

Um tuplo $\mathcal{H} = (H, \sqcap, \sqcup, \Rightarrow, 0, 1)$ *diz-se álgebra de Heyting se:*

- $(H, \sqcap, \sqcup)$ *é um reticulado distributivo com máximo 1 e mínimo 0;*
- *Para todo* $a, b \in H$, *existe* $a \Rightarrow b$.

Exemplo

$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} = (O(\mathbb{R}), \cap, \cup, \Rightarrow, \emptyset, \mathbb{R})$ *onde* $X \Rightarrow Y = Int((\mathbb{R} \setminus X) \cup Y)$ *e* $O(\mathbb{R})$ *é o conjunto dos subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}$.

Seja operação binária $\Rightarrow$ em LA_Γ definida por,

$$[\varphi] \Rightarrow [\psi] = [\varphi \to \psi]$$

Para quaisquer $[\varphi], [\psi] \in LA_\Gamma$, $[\varphi] \Rightarrow [\psi]$ é pseudo-complemento de $[\varphi]$ em relação a $[\psi]$.

Teorema

Para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ o tuplo $(LA_\Gamma, \sqcap, \sqcup, \Rightarrow, 0, 1)$ é uma álgebra de Heyting.

Semântica

A semântica define-se de forma análoga à lógica clássica.

Definição

Seja $\mathcal{H}$ uma álgebra de Heyting. Uma função $v : \mathcal{F} \to H$ diz-se $\mathcal{H}$-valoração se satisfaz as seguintes condições:

- $v(\perp) = 0$;
- $v(\neg\varphi) = v(\varphi) \Rightarrow 0$;
- $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \sqcap v(\psi)$;
- $v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \sqcup v(\psi)$;
- $v(\varphi \to \psi) = v(\varphi) \Rightarrow v(\psi)$;
- $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = (v(\varphi) \Rightarrow v(\psi)) \sqcap (v(\psi) \Rightarrow v(\varphi))$;

Definição

Para $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ diz-se que φ é consequência de Γ numa álgebra de Heyting $\mathcal{H}$, e escreve-se $\Gamma \models_{\mathcal{H}} \varphi$ se:

$$Se\ para\ todo\ \psi \in \Gamma, v(\psi) = 1,\ então\ v(\varphi) = 1$$

Teorema

Para todo $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$,

1. *Se para toda álgebra de Heyting $\mathcal{H}, \Gamma \models_{\mathcal{H}} \varphi$, então $\Gamma \models_{LA_\Gamma} \varphi$;*
2. *Se $\Gamma \models_{LA_\Gamma} \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$;*
3. *Se $\Gamma \vdash \varphi$ então para toda a álgebra de Heyting $\mathcal{H}, \Gamma \models_H \varphi$.*

Demonstração.

O primeiro ponto segue diretamente de LA_Γ ser álgebra de Heyting. O segundo segue da construção de LA_Γ. O último recorre a indução nas derivações da lógica intuicionista. □

$$
\begin{tikzcd}
& \boxed{\Gamma \models_{\mathsf{LA}_\Gamma} \varphi} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{\forall \mathcal{H}, \Gamma \models_{\mathcal{H}} \varphi} \arrow[ur, Rightarrow] & & \boxed{\Gamma \vdash \varphi} \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\Gamma \models_{LA_\Gamma} \varphi} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & \boxed{\forall \mathcal{H}, \Gamma \models_{\mathcal{H}} \varphi} \arrow[ur, Rightarrow] & & \boxed{\Gamma \vdash \varphi} \arrow[ll, Rightarrow] \\
\boxed{\Gamma \models_{\mathcal{O}(\mathbb{R})} \varphi} \arrow[ur, Leftrightarrow, red] & & &
\end{tikzcd}$$

Lógica Quântica

Introdução

- Inventada em 1936 por Birkhoff e Von Neumann.
- Uma de duas lógicas relacionadas com a mecânica quântica.

Introdução

- Inventada em 1936 por Birkhoff e Von Neumann.
- Uma de duas lógicas relacionadas com a mecânica quântica.

Para a lógica quântica vamos limitar os conectivos a $\wedge$ e $\neg$ sendo a disjunção, $\vee$, definida através das leis de De Morgan, $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. A principal diferença da lógica clássica para a lógica quântica é que na lógica quântica não se verifica a "distributividade" de $\wedge$ por $\vee$ e vice-versa.

Ortorreticulados

Definição

Um tuplo $\mathcal{B} = (B, \leq, {}^{C}, 1, 0)$ *diz-se um ortorreticulado se:*

- $(B, \leq)$ *é reticulado com máximo e mínimo os elementos 1 e 0, respetivamente.*
- ^{C} *é uma operação unária (que chamaremos de ortocomplemento) que satisfaz as seguintes propriedades*
  - $a \sqcap a^{C} = 0$;
  - $a \sqcup a^{C} = 1$;
  - $a^{CC} = a$;
  - *Se* $a \leq b$ *então* $b^{C} \leq a^{C}$.

Definição

Seja $\mathcal{B}$ um ortorreticulado. Uma função $v : \mathcal{F} \to B$ diz-se $\mathcal{B}$-valoração se satisfaz as seguintes condições:

- $v(\neg\varphi) = v(\varphi)^C$;
- $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \sqcap v(\psi)$

Definição

Sejam $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\varphi \in \mathcal{F}$. Diz-se que φ é consequência de Γ num ortorreticulado $\mathcal{B}$, e escreve-se $\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi$, se para toda $\mathcal{B}$-valoração v e para todo $x \in B$:

$$\textit{Se } x \leq v(\psi) \textit{ para toda a fórmula } \psi \in \Gamma, \textit{ então } x \leq v(\varphi)$$

Tabela 2

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \mathit{Ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Delta, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}\ \mathit{Corte} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}\ \mathit{Enf}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ \wedge_D \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \sigma}\ \wedge_E$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ \neg_D \qquad \frac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}\ \mathit{CR}$$

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \neg\neg\varphi}\ \mathit{DN1} \qquad \frac{}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \varphi}\ \mathit{DN2}$$

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \wedge \neg\varphi \vdash \psi}\ \mathit{EFQ}$$

Como não consideramos o conectivo $\rightarrow$ na lógica quântica, a relação de equivalência é definida de fórmula semelhante.

$$\varphi \sim_{\Gamma} \psi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi \text{ e } \Gamma, \psi \vdash \varphi.$$

Como não consideramos o conectivo $\rightarrow$ na lógica quântica, a relação de equivalência é definida de fórmula semelhante.

$$\varphi \sim_{\Gamma} \psi \ \text{ se e só se } \ \Gamma, \varphi \vdash \psi \text{ e } \Gamma, \psi \vdash \varphi.$$

Consideramos $LA_{\Gamma} = \mathcal{F}/\sim_{\Gamma}$ e a relação de ordem parcial $\leq$ e a operação ^{C} em LA_{Γ} definidas por,

$$[\varphi] \leq_{\Gamma} [\psi] \text{ se e só se } \Gamma, \varphi \vdash \psi$$

$$[\varphi]^{C} = [\neg\varphi]$$

Teorema

$(LA_{\Gamma}, \leq, ^{C}, [\neg\bot], [\bot])$ *é um ortorreticulado.*

Teorema

Para todo $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$,

1. *Se para todo ortorreticulado* $\mathcal{B}, \Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi$, *então* $\Gamma \models_{LA_\Gamma} \varphi$;
2. *Se* $\Gamma \models_{LA_\Gamma} \varphi$ *então* $\Gamma \vdash \varphi$;
3. *Se* $\Gamma \vdash \varphi$ *então para todo ortorreticulado* $\mathcal{B}, \Gamma \models_{B} \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma \models_{LA_\Gamma} \varphi \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\forall \mathcal{B}, \Gamma \models_{\mathcal{B}} \varphi \arrow[ur, Rightarrow] & & \Gamma \vdash \varphi \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Conclusão

Conclusão

- As valorações da semântica dão valor às fórmulas segundo uma estrutura algébrica;

Lógica Clássica	Álgebras de Boole
Lógica Intuicionista	Álgebras de Heyting
Lógica Quântica	Ortorreticulados

- Podemos descobrir quais as estruturas subjacentes a cada lógica através da álgebra de Lindenbaum respetiva;
- Algumas lógicas têm uma álgebra única que descreve as consequências para uma quantificação universal nas álgebras.