

Dinâmica do Triângulo Pedal

Rodrigo Pereira

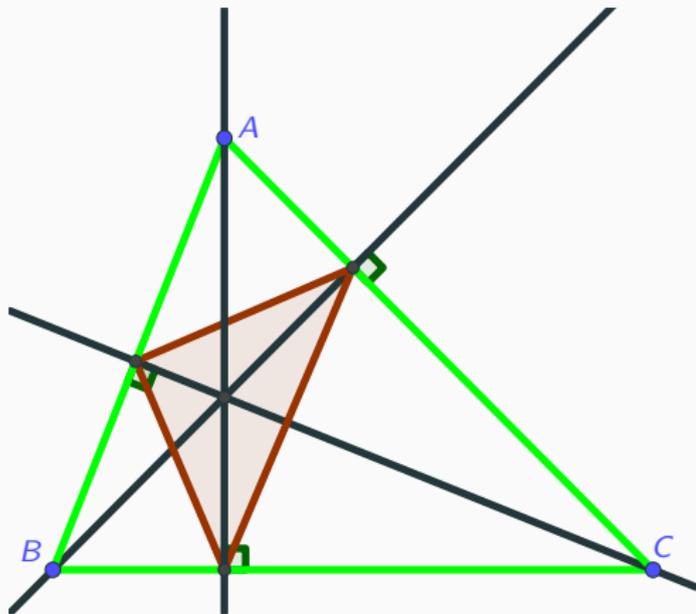
4 setembro 2020

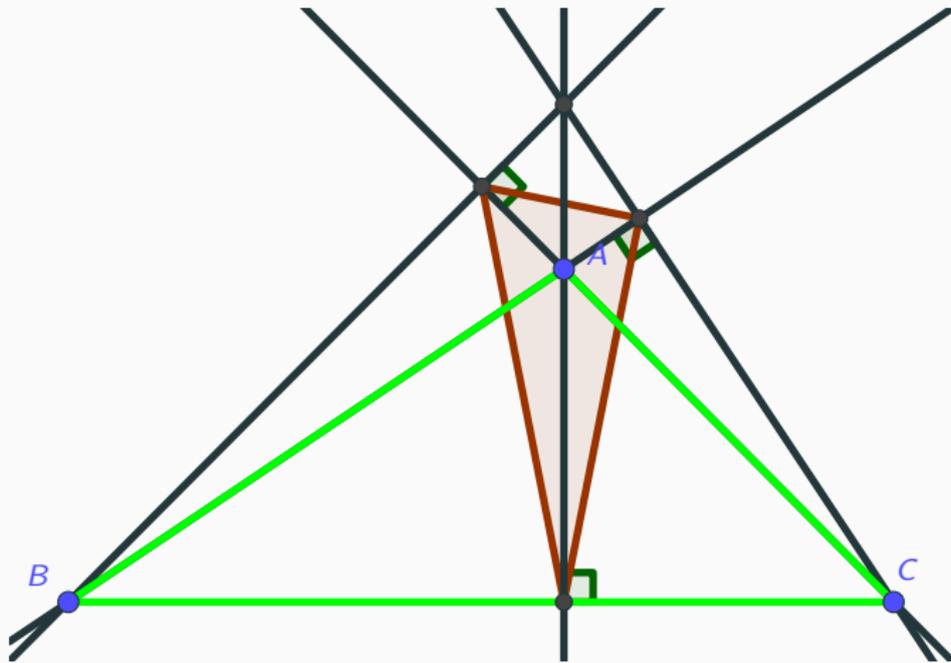
Programa Novos Talentos em Matemática 2019/20

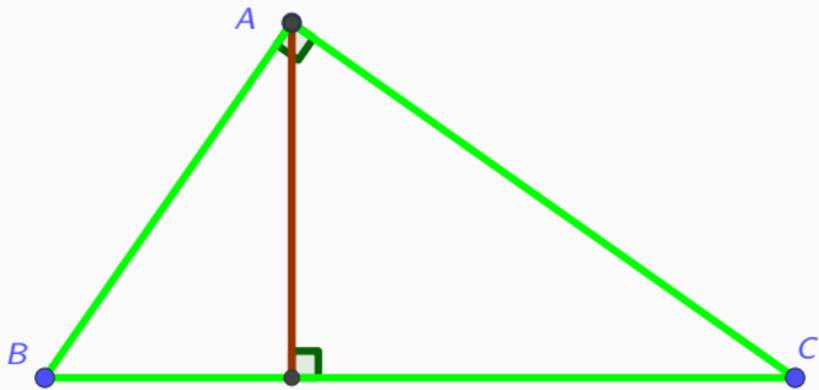


Triângulo pedal

Dado um triângulo ABC , considerem-se as projeções ortogonais de cada vértice no respectivo lado oposto. Unindo-as, obtemos um triângulo (que pode ser degenerado) que se designa o *pedal de ABC* .







Ângulos e lados do pedal

Sejam ABC um triângulo de lados a, b, c e ângulos A, B, C e designemos por $A'B'C'$ o pedal de ABC . Se ABC for acutângulo temos:

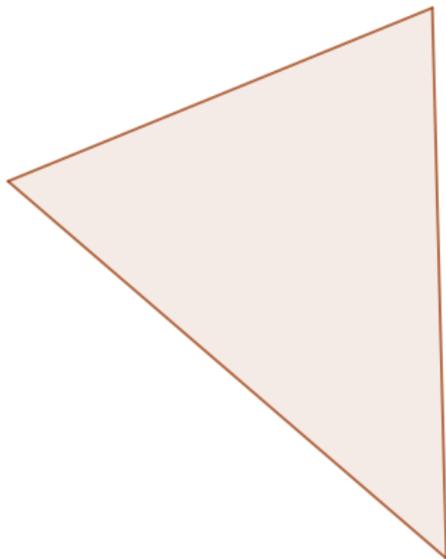
$$\begin{aligned}a' &= a \cos(A) & b' &= b \cos(B) & c' &= c \cos(C) \\A' &= 180 - 2A & B' &= 180 - 2B & C' &= 180 - 2C.\end{aligned}$$

Caso A seja obtuso:

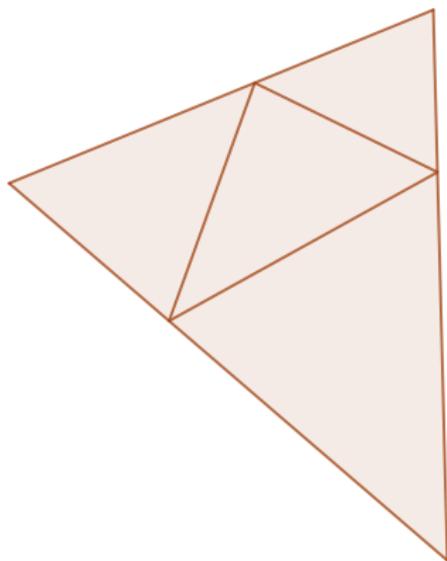
$$\begin{aligned}a' &= -a \cos(A) & b' &= b \cos(B) & c' &= c \cos(C) \\A' &= 2A - 180 & B' &= 2B & C' &= 2C.\end{aligned}$$

E fórmulas análogas são válidas caso B ou C sejam obtusos.

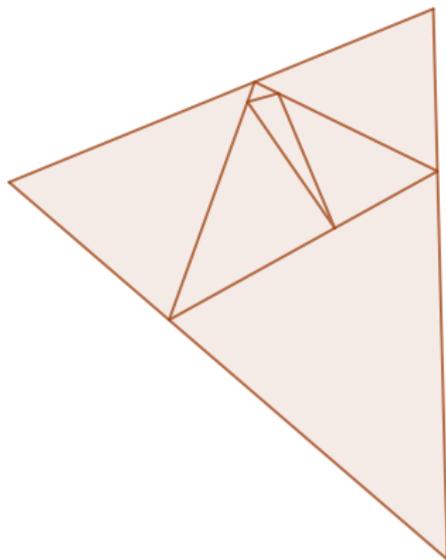
Sequência pedal



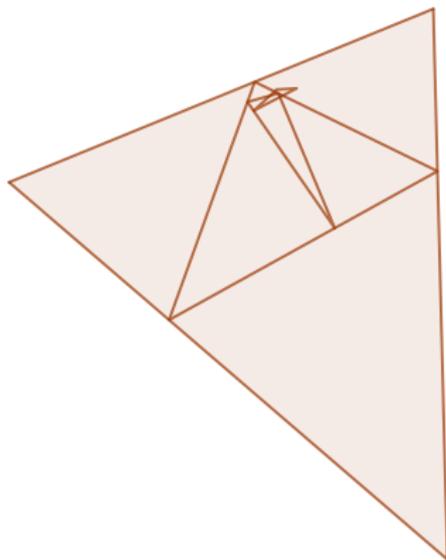
Sequência pedal



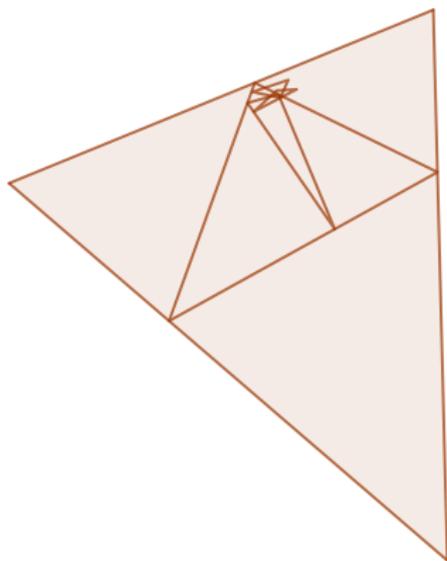
Sequência pedal



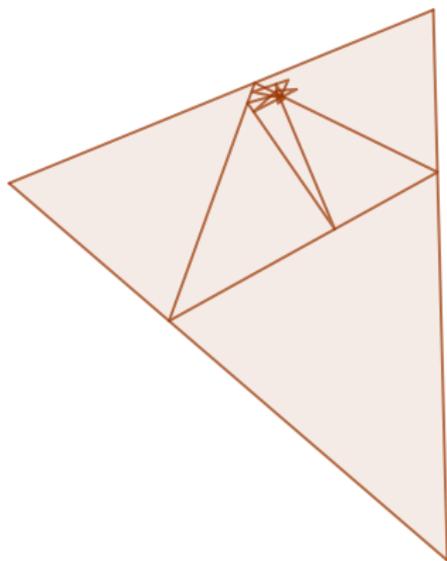
Sequência pedal



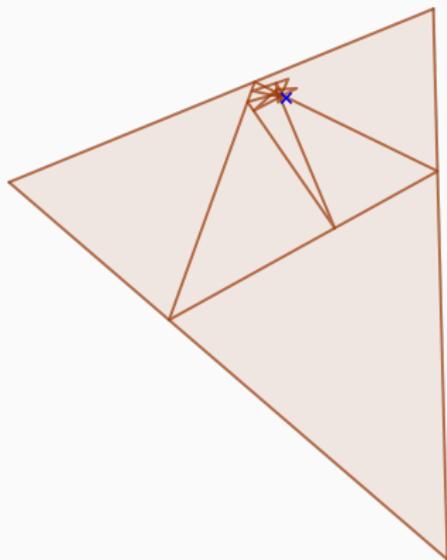
Sequência pedal



Sequência pedal



Sequência pedal



Circunferência dos 9 pontos

O pedal de um triângulo ABC tem como circunferência circunscrita a "*circunferência dos 9 pontos*", assim chamada por conter 9 pontos especiais de ABC :

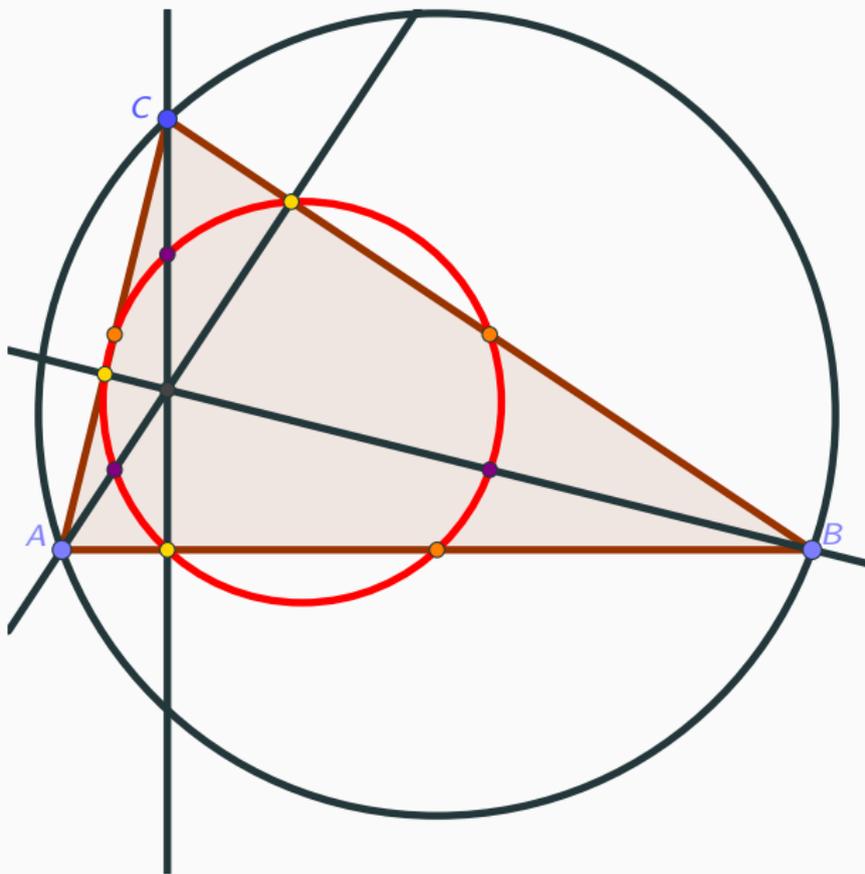
- os 3 pés das alturas;
- os 3 pontos médios dos lados;
- os 3 pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices do triângulo.

Circunferência dos 9 pontos

O pedal de um triângulo ABC tem como circunferência circunscrita a "*circunferência dos 9 pontos*", assim chamada por conter 9 pontos especiais de ABC :

- os 3 pés das alturas;
- os 3 pontos médios dos lados;
- os 3 pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices do triângulo.

Esta circunferência é imagem da circunferência circunscrita de ABC pela homotetia de centro no ortocentro de ABC e razão $\frac{1}{2}$.



Caso o triângulo inicial não seja pré-degenerado, a sua sequência pedal nunca termina. Como os triângulos ficam arbitrariamente pequenos, deduzimos que há convergência para *um ponto do plano*.

Considerando os vértices do triângulo ABC como inscritos na circunferência de centro O e raio 1 (em \mathbb{C}), é possível encontrar uma fórmula para o ponto limite da sequência pedal.

Uma forma possível de chegar ao ponto limite é através da **sequência dos circuncentros**.

Sejam:

$$A_0 = \exp(2\pi i\alpha_0) \quad B_0 = \exp(2\pi i\beta_0) \quad C_0 = \exp(2\pi i\gamma_0), \quad \alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

Sejam:

$$A_0 = \exp(2\pi i\alpha_0) \quad B_0 = \exp(2\pi i\beta_0) \quad C_0 = \exp(2\pi i\gamma_0), \quad \alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

$$H_0 = \text{ortocentro de } A_0B_0C_0$$

Sejam:

$$A_0 = \exp(2\pi i\alpha_0) \quad B_0 = \exp(2\pi i\beta_0) \quad C_0 = \exp(2\pi i\gamma_0), \quad \alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

$$H_0 = \text{ortocentro de } A_0B_0C_0$$

$$Q_0 = \text{circuncentro de } A_0B_0C_0$$

Sejam:

$$A_0 = \exp(2\pi i\alpha_0) \quad B_0 = \exp(2\pi i\beta_0) \quad C_0 = \exp(2\pi i\gamma_0), \quad \alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

$$H_0 = \text{ortocentro de } A_0B_0C_0$$

$$Q_0 = \text{circuncentro de } A_0B_0C_0$$

$$K_0 = \text{circunferência circunscrita de } A_0B_0C_0$$

Sejam:

$$A_0 = \exp(2\pi i\alpha_0) \quad B_0 = \exp(2\pi i\beta_0) \quad C_0 = \exp(2\pi i\gamma_0), \quad \alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

$H_0 =$ ortocentro de $A_0B_0C_0$

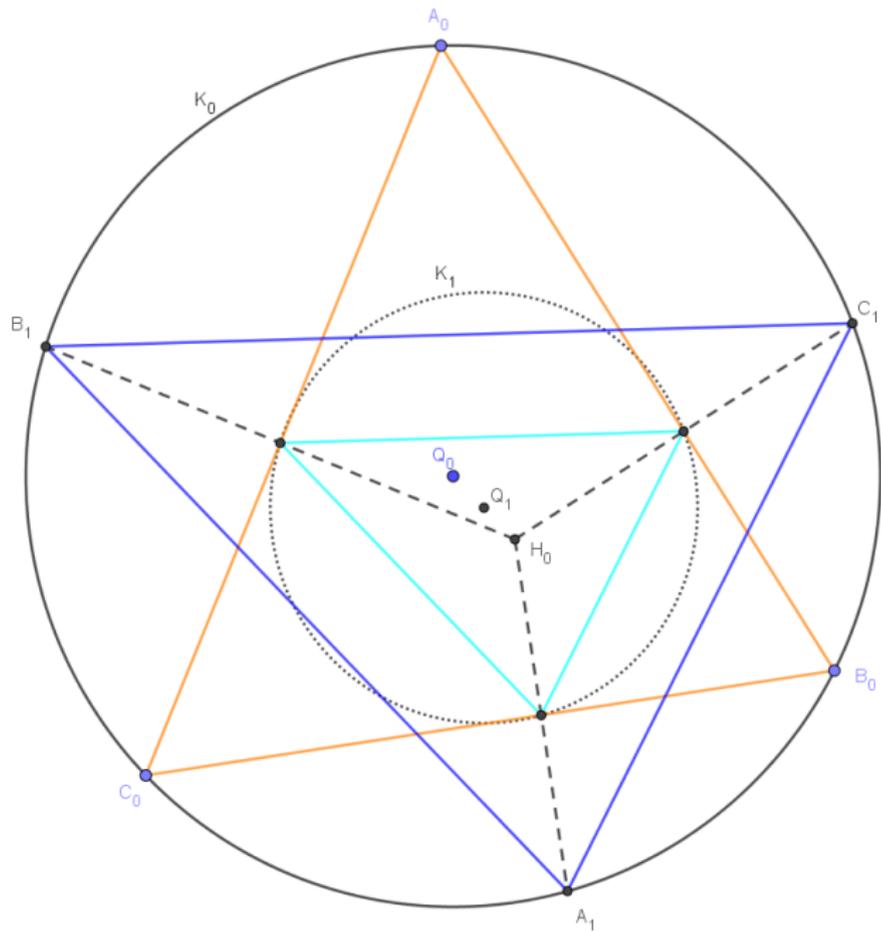
$Q_0 =$ circuncentro de $A_0B_0C_0$

$K_0 =$ circunferência circunscrita de $A_0B_0C_0$

E

$A'_1B'_1C'_1$ o pedal de $A_0B_0C_0$.

A homotetia de centro H_0 e razão 2 envia K_1 (circunferência circunscrita do pedal) em K_0 , e portanto envia o pedal num triângulo semelhante $A_1B_1C_1$ inscrito em K_0 .



H_0 e Q_0 satisfazem a seguinte relação:

$$H_0 - Q_0 = (A_0 - Q_0) + (B_0 - Q_0) + (C_0 - Q_0)$$

pois a composta das translações segundo os vetores $\overrightarrow{Q_0A_0}, \overrightarrow{Q_0B_0}, \overrightarrow{Q_0C_0}$ envia as mediatrizes dos lados do triângulo nas suas alturas e portanto envia Q_0 em H_0 .

H_0 e Q_0 satisfazem a seguinte relação:

$$H_0 - Q_0 = (A_0 - Q_0) + (B_0 - Q_0) + (C_0 - Q_0)$$

pois a composta das translações segundo os vetores $\overrightarrow{Q_0A_0}, \overrightarrow{Q_0B_0}, \overrightarrow{Q_0C_0}$ envia as mediatrizes dos lados do triângulo nas suas alturas e portanto envia Q_0 em H_0 .

Como estamos a supor $Q_0 = 0$, daqui vem:

$$H_0 = \exp(2\pi i\alpha_0) + \exp(2\pi i\beta_0) + \exp(2\pi i\gamma_0)$$

Como Q_1 é o ponto médio do segmento de extremos H_0 e Q_0 , temos:

$$Q_1 - Q_0 = \frac{H_0 - Q_0}{2}$$

e então:

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\exp(2\pi i\alpha_0) + \exp(2\pi i\beta_0) + \exp(2\pi i\gamma_0))$$

Como Q_1 é o ponto médio do segmento de extremos H_0 e Q_0 , temos:

$$Q_1 - Q_0 = \frac{H_0 - Q_0}{2}$$

e então:

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\exp(2\pi i\alpha_0) + \exp(2\pi i\beta_0) + \exp(2\pi i\gamma_0))$$

Em geral, para o n -ésimo termo da sequência pedal, temos:

$$\begin{aligned} H_n - Q_n &= (A'_n - Q_n) + (B'_n - Q_n) + (C'_n - Q_n) \\ &= \frac{1}{2^n} \left((A_n - Q_0) + (B_n - Q_0) + (C_n - Q_0) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\exp(2\pi i\alpha_n) + \exp(2\pi i\beta_n) + \exp(2\pi i\gamma_n) \right) \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} - Q_n &= \frac{1}{2}(H_n - Q_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}(\exp(2\pi i\alpha_n) + \exp(2\pi i\beta_n) + \exp(2\pi i\gamma_n)) \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} - Q_n &= \frac{1}{2}(H_n - Q_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}(\exp(2\pi i\alpha_n) + \exp(2\pi i\beta_n) + \exp(2\pi i\gamma_n)) \end{aligned}$$

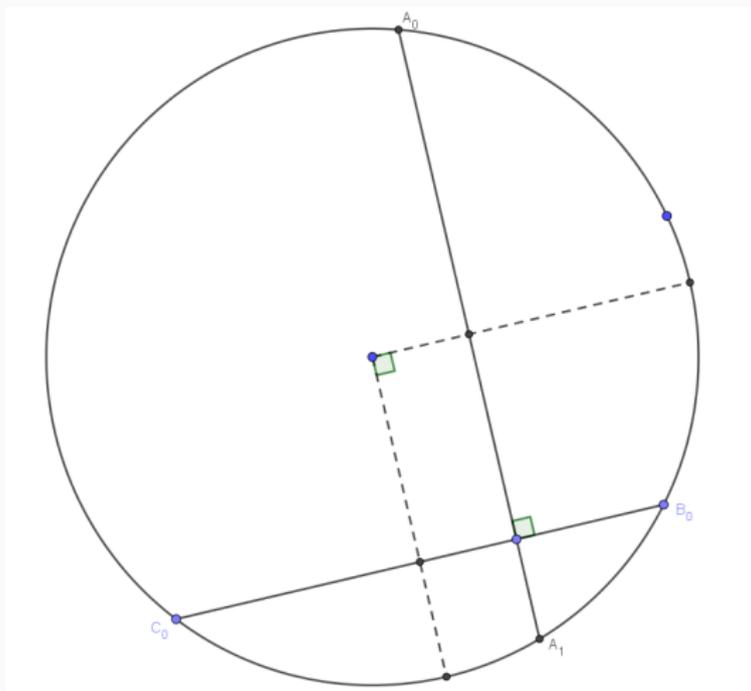
Finalmente, o ponto limite é dado por:

$$\begin{aligned} \lim_{N \in \mathbb{N}_0} Q_N &= \lim_{N \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (Q_{n+1} - Q_n) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (Q_{n+1} - Q_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (\exp(2\pi i\alpha_n) + \exp(2\pi i\beta_n) + \exp(2\pi i\gamma_n)) \end{aligned}$$

Determinação de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$

É possível escrever $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ em função dos parâmetros iniciais $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ de modo a obter uma fórmula do ponto limite que dependa explicitamente destes.

Pretende-se encontrar $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ tais que: $A_1 = \exp(2\pi i\alpha_1)$, $B_1 = \exp(2\pi i\beta_1)$, $C_1 = \exp(2\pi i\gamma_1)$. Para tal, note-se que A_0A_1 é ortogonal a B_0C_0 e portanto os argumentos dos pontos médios têm uma diferença de $\pi/2$.



Ou seja:

$$2\pi \left(\frac{\beta_0 + \gamma_0}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = 2\pi \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \right)$$

de onde resulta: $\alpha_1 = 1/2 - \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0$

De forma análoga, obtém-se:

$$\beta_1 = 1/2 - \beta_0 + \alpha_0 + \gamma_0$$

$$\gamma_1 = 1/2 - \gamma_0 + \alpha_0 + \beta_0$$

Tem-se então:

$$a_1 = Aa_0 + b$$

com

$$a_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^t, A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = (1/2, 1/2, 1/2)^t$$

Como $Ab = b$, tem-se:

$$a_n = A^n a_0 + nb$$

Como $Ab = b$, tem-se:

$$a_n = A^n a_0 + nb$$

Além disso, A é simétrica, logo diagonalizável:

$$A = UDU^{-1}$$

com

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Como $Ab = b$, tem-se:

$$a_n = A^n a_0 + nb$$

Além disso, A é simétrica, logo diagonalizável:

$$A = UDU^{-1}$$

com

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$A^n = U D^n U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2(-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 + 2(-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 + 2(-2)^n \end{bmatrix}$$

Consequentemente:

$$\alpha_n = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3} + (-2)^n \frac{2\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0}{3} + \frac{n}{2}$$

O que implica que:

$$\exp(2\pi i \alpha_n) = (-1)^n \exp\left(2\pi i \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3}\right) \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{2\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0}{3}\right)$$

Consequentemente:

$$\alpha_n = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3} + (-2)^n \frac{2\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0}{3} + \frac{n}{2}$$

O que implica que:

$$\exp(2\pi i \alpha_n) = (-1)^n \exp\left(2\pi i \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3}\right) \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{2\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0}{3}\right)$$

As estimativas de β_n e γ_n seguem fórmulas de recorrência análogas.

Fica então provado o seguinte resultado:

Fórmula do ponto limite: Teorema de Manning

Se os vértices do triângulo original são os pontos em \mathbb{C} dados por

$$A = \exp(2\pi i\alpha) \quad B = \exp(2\pi i\beta) \quad C = \exp(2\pi i\gamma)$$

então o ponto limite é imagem da função

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)}{\exp\left(2\pi i \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{2\alpha - \beta - \gamma}{3}\right) \right. \\ &+ \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{-\alpha + 2\beta - \gamma}{3}\right) \\ &\left. + \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{-\alpha - \beta + 2\gamma}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

- $|\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)| \leq 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$
 $\Rightarrow \mathcal{L}$ converge uniformemente para uma função **contínua**,
pelo teste M de Weierstrass.

- $|\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)| \leq 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$
 $\Rightarrow \mathcal{L}$ converge uniformemente para uma função **contínua**, pelo teste M de Weierstrass.
- \mathcal{L} é simétrica em relação às 3 variáveis α, β, γ
 \Rightarrow O ponto limite não depende da ordenação dos vértices.

Observações

- $|\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)| \leq 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$
 $\Rightarrow \mathcal{L}$ converge uniformemente para uma função **contínua**, pelo teste M de Weierstrass.
- \mathcal{L} é simétrica em relação às 3 variáveis α, β, γ
 \Rightarrow O ponto limite não depende da ordenação dos vértices.
- $\mathcal{L}(\alpha + \theta, \beta + \theta, \gamma + \theta) = \exp(2\pi i\theta)\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)$
Rotação do triângulo \Rightarrow Rotação do ponto limite

Observações

- $|\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)| \leq 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$
 $\Rightarrow \mathcal{L}$ converge uniformemente para uma função **contínua**, pelo teste M de Weierstrass.
- \mathcal{L} é simétrica em relação às 3 variáveis α, β, γ
 \Rightarrow O ponto limite não depende da ordenação dos vértices.
- $\mathcal{L}(\alpha + \theta, \beta + \theta, \gamma + \theta) = \exp(2\pi i\theta)\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)$
Rotação do triângulo \Rightarrow Rotação do ponto limite
- $\mathcal{L}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \overline{\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)}$
Reflexão do triângulo \Rightarrow Reflexão do ponto limite

Fixemos β_0 e γ_0 e façamos variar $(\alpha, \beta_0, \gamma_0)$ no domínio da aplicação \mathcal{L} .

Ou seja, consideremos um triângulo e façamos variar um dos seus vértices sobre a sua circunferência circunscrita.

A curva traçada pelo ponto limite pode então parametrizar-se por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cdot, \beta_0, \gamma_0): [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\mapsto \mathcal{L}(\alpha, \beta_0, \gamma_0).\end{aligned}$$

- $\mathcal{L}(0, \beta_0, \gamma_0) = \mathcal{L}(1, \beta_0, \gamma_0)$
⇒ Todas as curvas são fechadas

Observações

- $\mathcal{L}(0, \beta_0, \gamma_0) = \mathcal{L}(1, \beta_0, \gamma_0)$
 \Rightarrow Todas as curvas são fechadas
- O formato da curva depende apenas do tamanho da corda B_0C_0 .

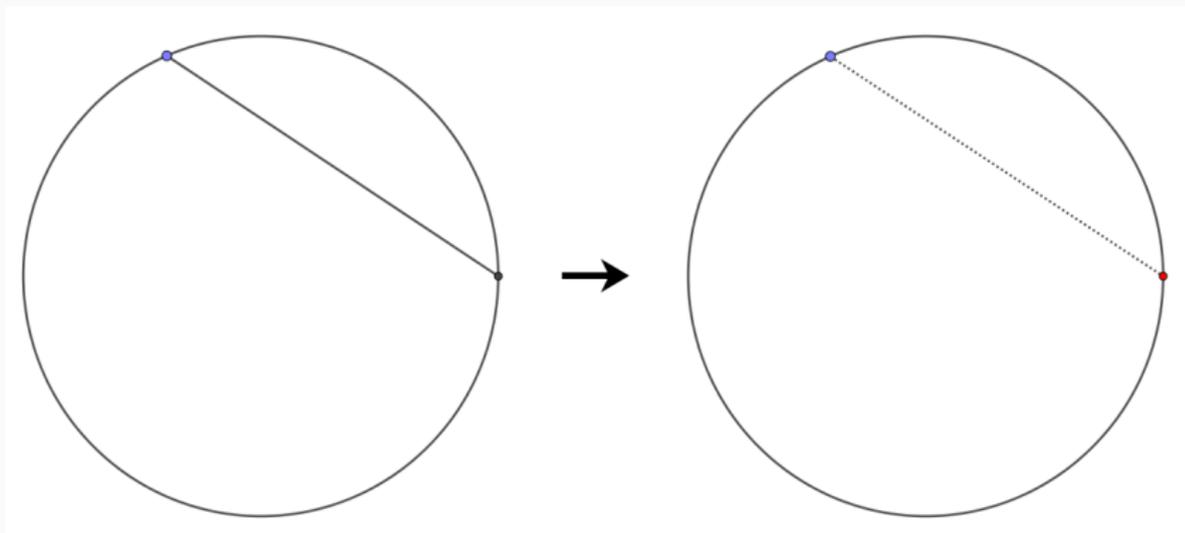
Uma forma de descrever a família de todas as curvas (sem repetição) é:

$$\left(\mathcal{L}([0, 1], 0, \gamma_0) \right)_{\gamma_0 \in [0, \frac{1}{2}]}$$

(Fixa-se B_0 em 1 e C_0 percorre a metade superior da circunferência)

Curvas simples - ponto

Quando B_0 e C_0 coincidem ($\gamma_0 = 0$), o triângulo degenera num segmento e o seu "pedal" reduz-se ao ponto $B_0 = C_0$.



É possível ver esse comportamento através da fórmula:

$$\frac{\mathcal{L}(\alpha, 0, 0)}{\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\alpha\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(-2)^{n+1}\alpha\right) \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n}{2^n} \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(-2)^n\alpha\right) \right]$$

É possível ver esse comportamento através da fórmula:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}(\alpha, 0, 0)}{\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\alpha\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(-2)^{n+1}\alpha\right) \right. \\ &+ \left. \frac{(-1)^n}{2^n} \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(-2)^n\alpha\right) \right] \\ &= \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}\alpha\right)\end{aligned}$$

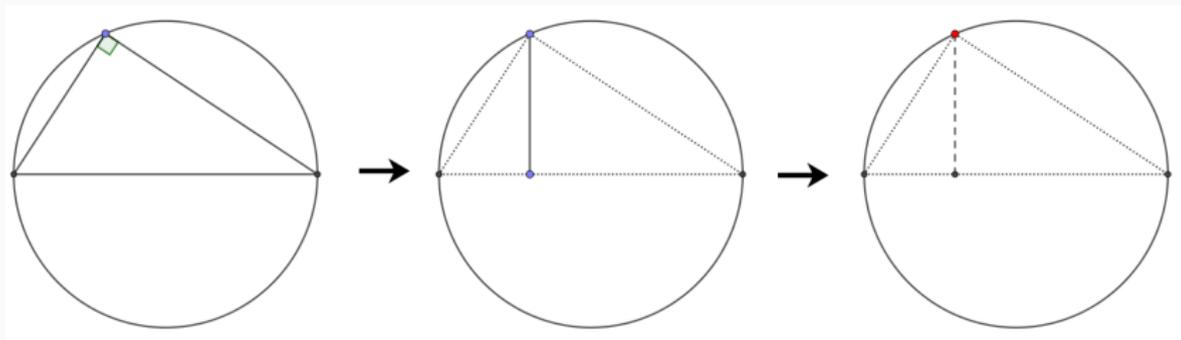
É possível ver esse comportamento através da fórmula:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}(\alpha, 0, 0)}{\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\alpha\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(-2)^{n+1}\alpha\right) \right. \\ &+ \left. \frac{(-1)^n}{2^n} \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(-2)^n\alpha\right) \right] \\ &= \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}\alpha\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\alpha, 0, 0) = 1, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Curvas simples - circunferência

Se B_0 e C_0 forem diametralmente opostos ($\gamma_0 = 1/2$), o triângulo AB_0C_0 é retângulo em A (quando é não degenerado). Primeiro colapsa na altura relativamente ao vértice A e de seguida no vértice A .

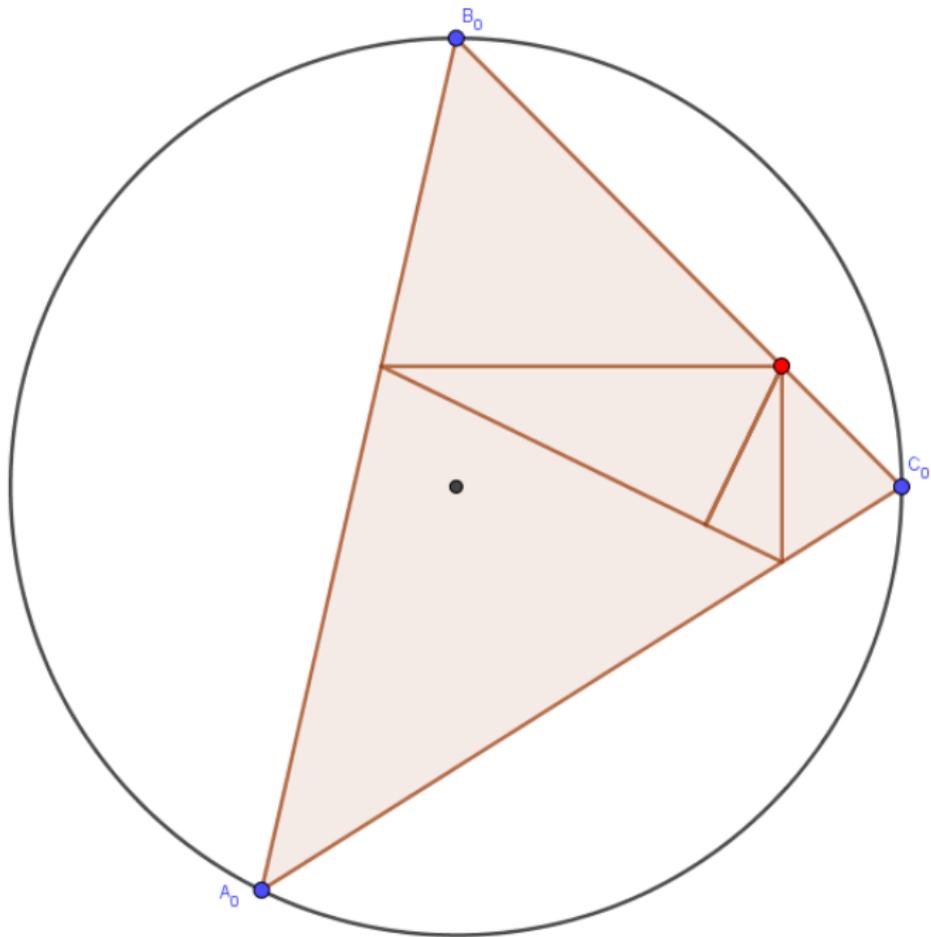


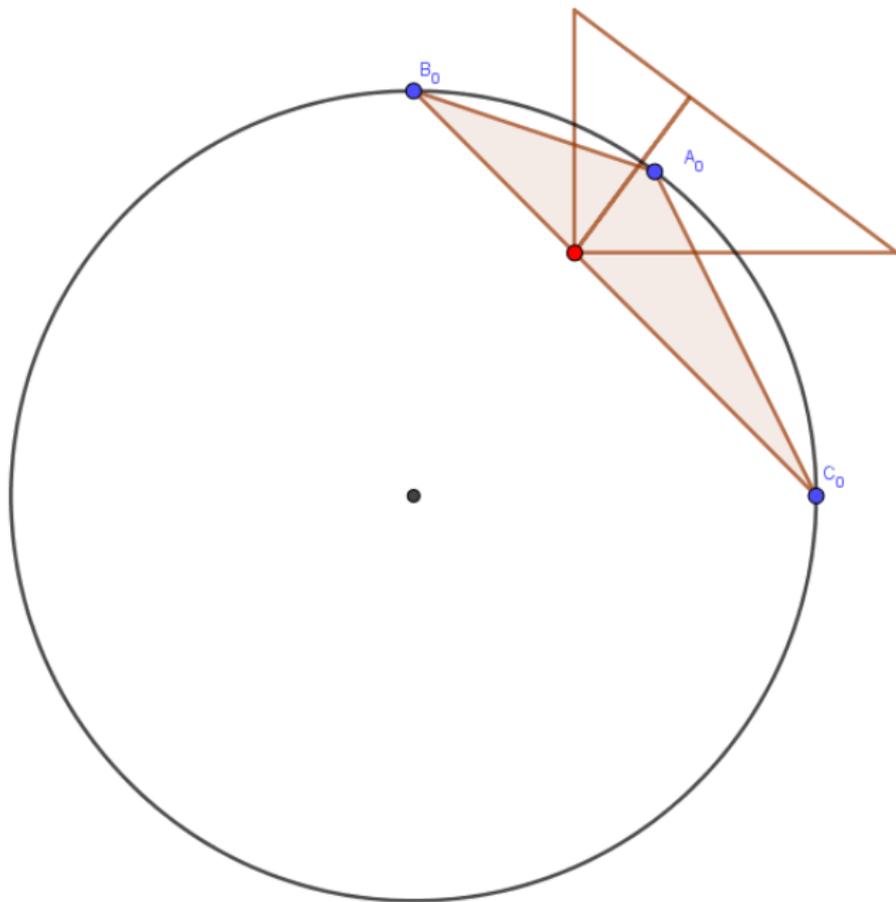
Portanto, o ponto limite coincide sempre com o ponto A .

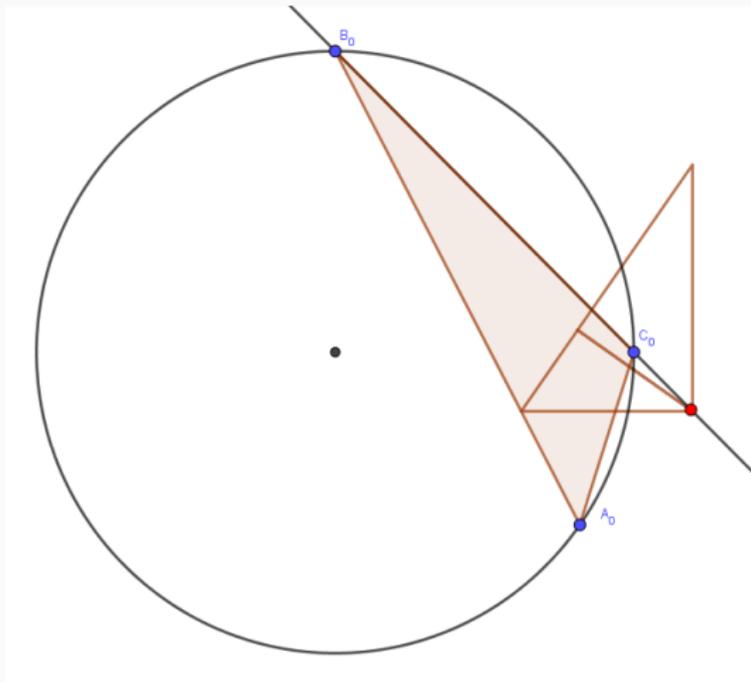
Curva simples - segmento de reta

Quando a corda B_0C_0 subtende um arco de amplitude $\pi/2$ ($\gamma_0 = 1/4$) o pedal do triângulo é retângulo – porque o ângulo em A ou tem amplitude $\pi/4$ ou $3\pi/4$ e em ambos os casos o pedal tem um ângulo de $\pi/2$ – com o ângulo reto na reta que contém a corda.

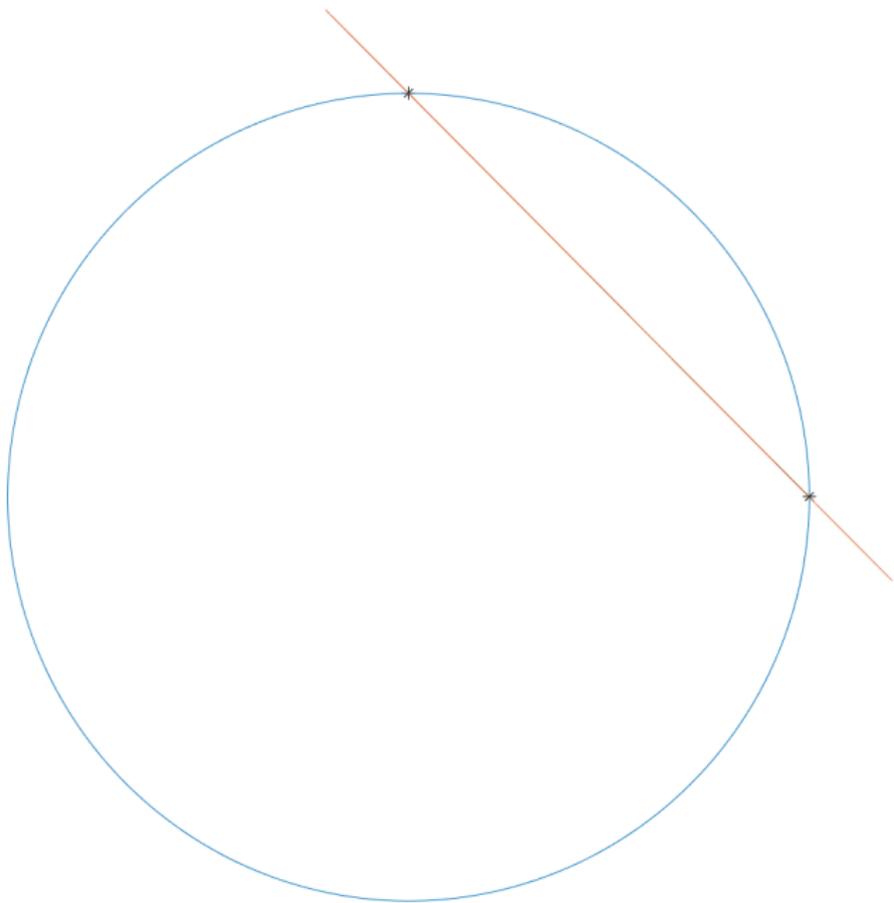
Portanto o ponto limite (que coincide com o vértice do ângulo reto) está sempre sobre esta reta.



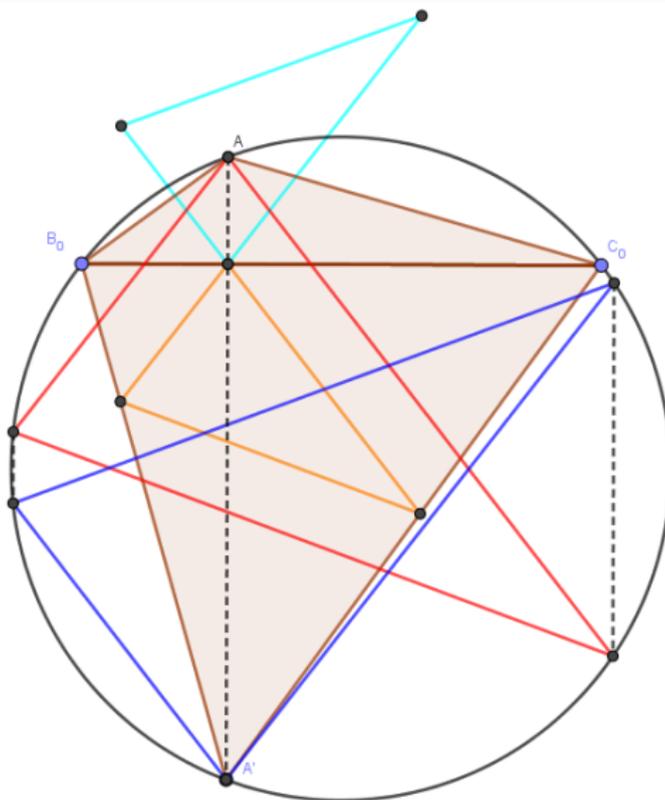




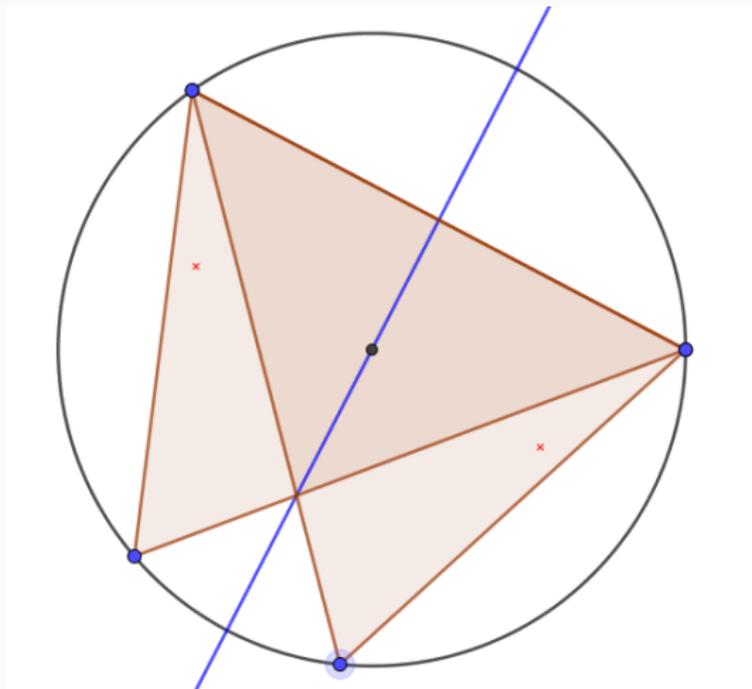
O traço da curva é obtido fazendo a projeção ortogonal de todos os pontos da circunferência na reta que contém a corda, pelo que o segmento tem comprimento igual ao diâmetro da circunferência ($= 2$).



De facto, os pedais são simétricos em relação a alguma reta horizontal. Como têm um vértice em comum na reta que contém a corda, é este o eixo de simetria.



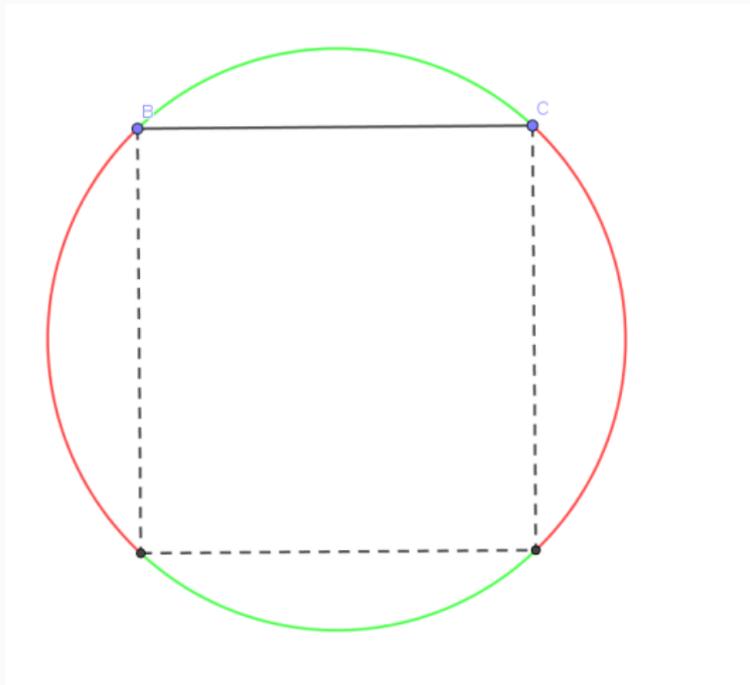
Eixo de simetria - mediatriz da corda B_0C_0

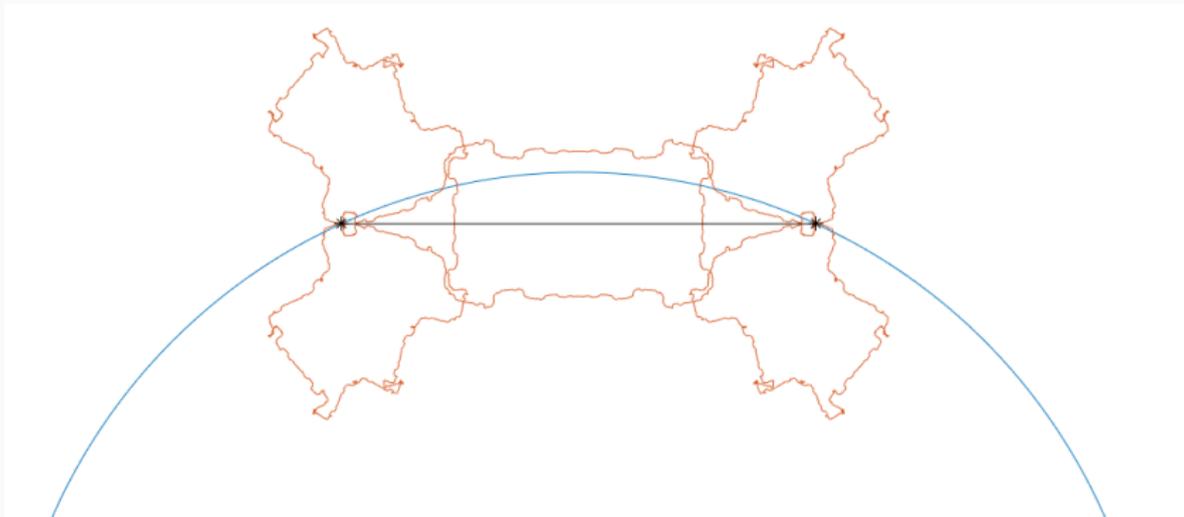


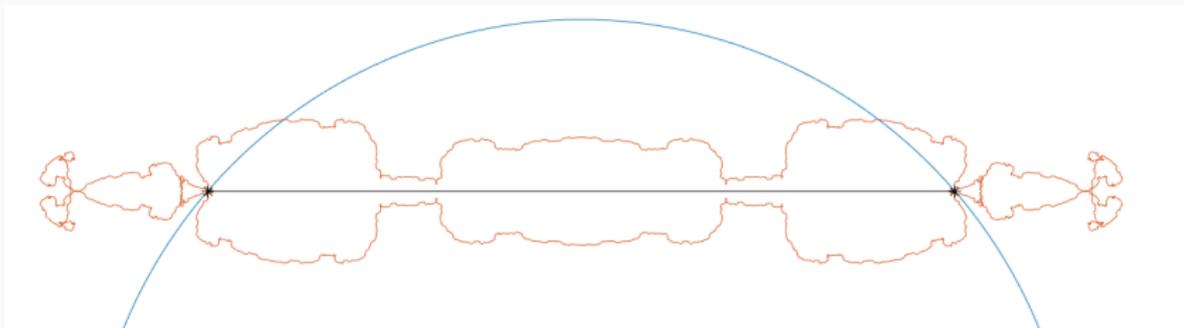
Reflexão do ponto A \Rightarrow Reflexão do triângulo \Rightarrow Reflexão do ponto limite

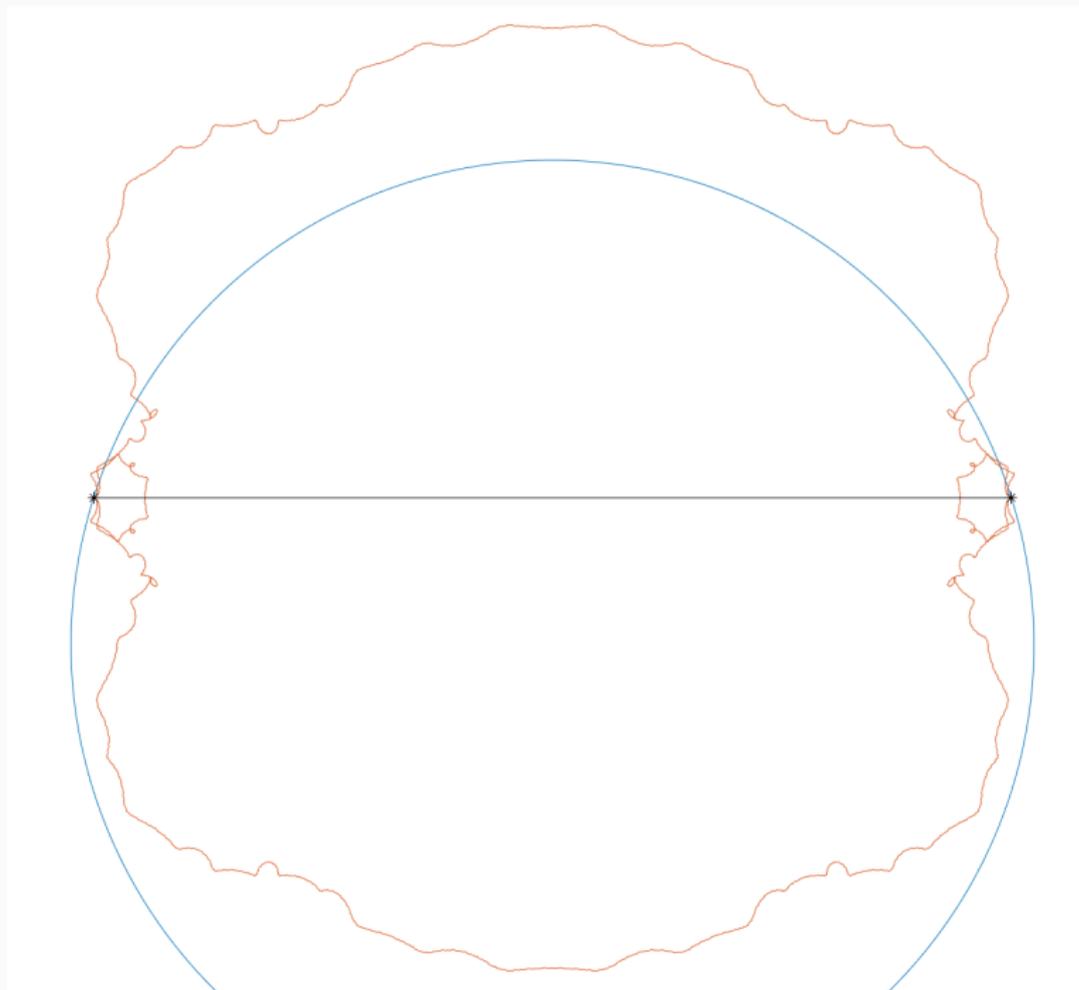
Estrutura da curva

Cada curva pode ser dividida em três partes: a secção do meio e as das extremidades, havendo sempre auto-interseções nos pontos B_0 e C_0 .









Diferenciabilidade da Curva - Teorema 2 de Manning

Fazendo as seguintes mudanças de variável:

$$b = \alpha - \gamma_0 \quad c = \beta_0 - \alpha$$

é possível provar que, se

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N} : \quad b + c = r = \frac{3p}{2^q}$$

sendo esta uma fração irredutível, então a curva obtida é diferenciável.

Veamos porquê:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(\alpha, \beta_0, \gamma_0)}{\exp\left(2\pi i \frac{\alpha + \beta_0 + \gamma_0}{3}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{r - 2c}{3}\right) \right. \\ &+ \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{r + c}{3}\right) \\ &\left. + \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{-2r + c}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

Vejam os porquê:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(\alpha, \beta_0, \gamma_0)}{\exp\left(2\pi i \frac{\alpha + \beta_0 + \gamma_0}{3}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{r - 2c}{3}\right) \right. \\ &+ \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{r + c}{3}\right) \\ &\left. + \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{-2r + c}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

E:

$$n \geq q \Rightarrow \frac{(-2)^n}{3} r = (-1)^n 2^{n-q} p \in \mathbb{Z}$$

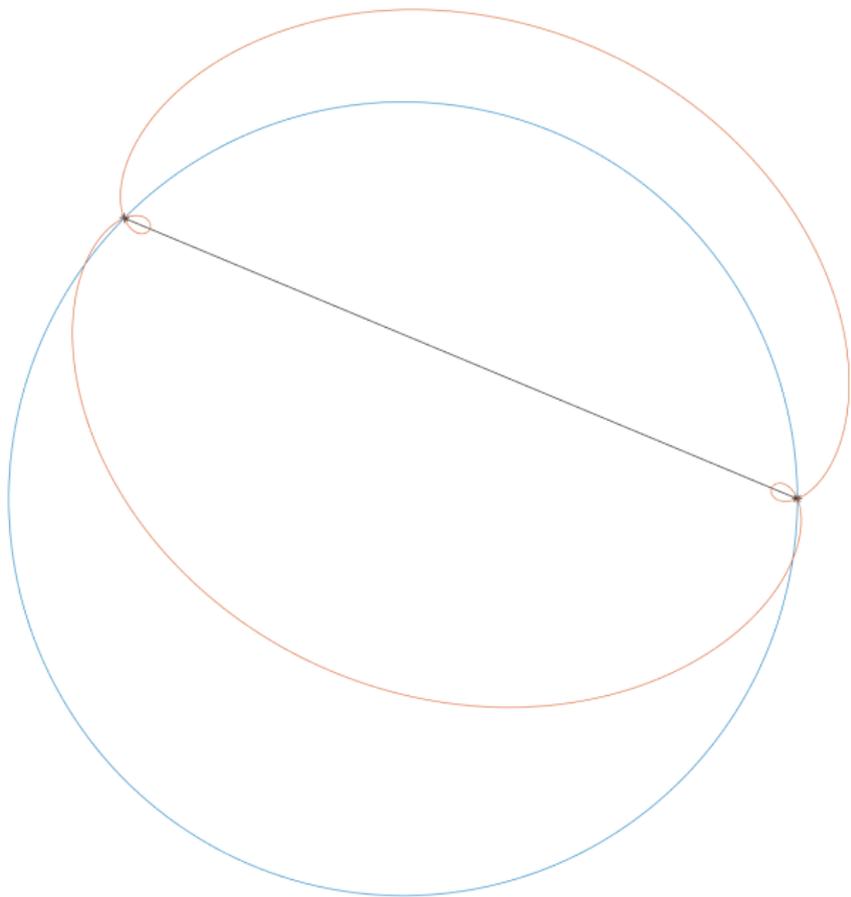
Pelo que, a partir do q -ésimo termo da série, temos a seguinte simplificação:

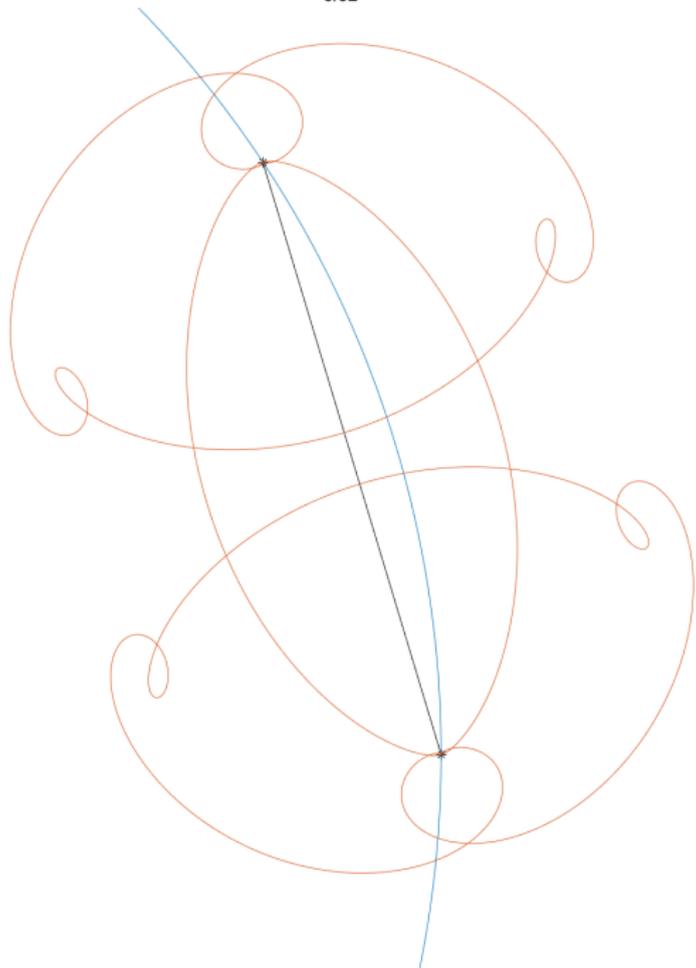
$$\sum_{n=q}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp \left(2\pi i (-2)^{n+1} \frac{c}{3} \right) + \frac{(-1)^n}{2^n} \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{c}{3} \right) \right]$$
$$= \frac{(-1)^q}{2^q} \exp \left(2\pi i (-2)^q \frac{c}{3} \right)$$

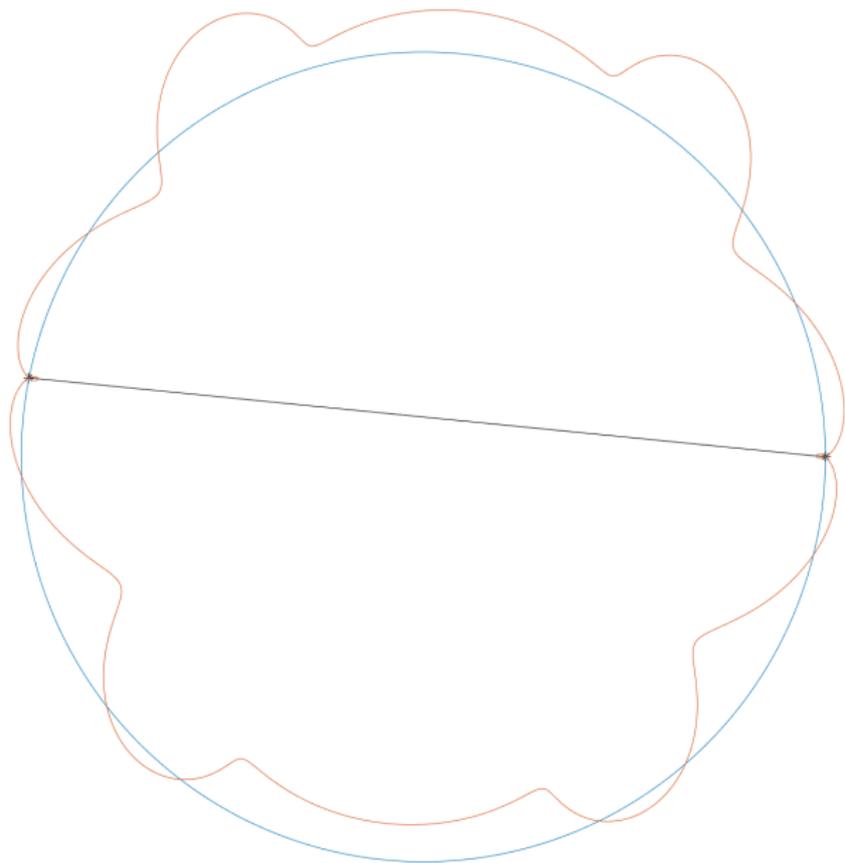
$$\sum_{n=q}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp \left(2\pi i (-2)^{n+1} \frac{c}{3} \right) + \frac{(-1)^n}{2^n} \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{c}{3} \right) \right]$$
$$= \frac{(-1)^q}{2^q} \exp \left(2\pi i (-2)^q \frac{c}{3} \right)$$

Portanto, nestas condições $\mathcal{L}(\cdot, \beta_0, \gamma_0)$ é uma soma finita de funções diferenciáveis na variável $c = \beta_0 - \alpha$

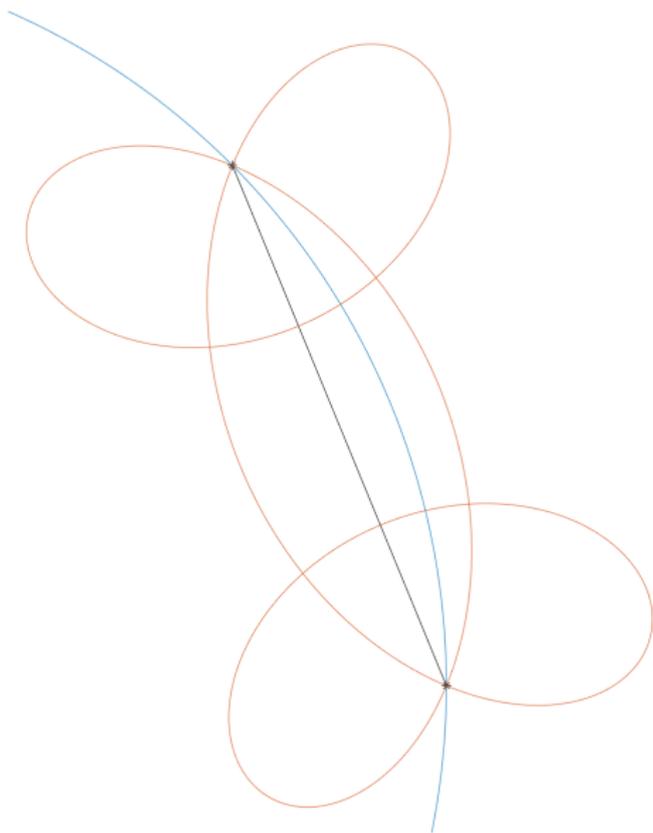
\Rightarrow A curva é diferenciável.

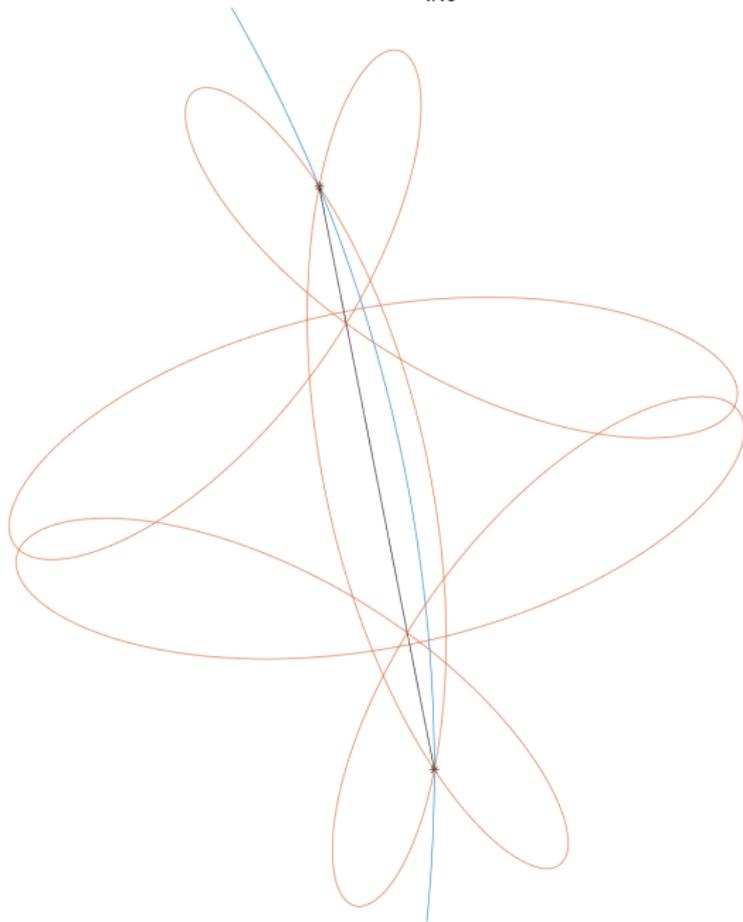


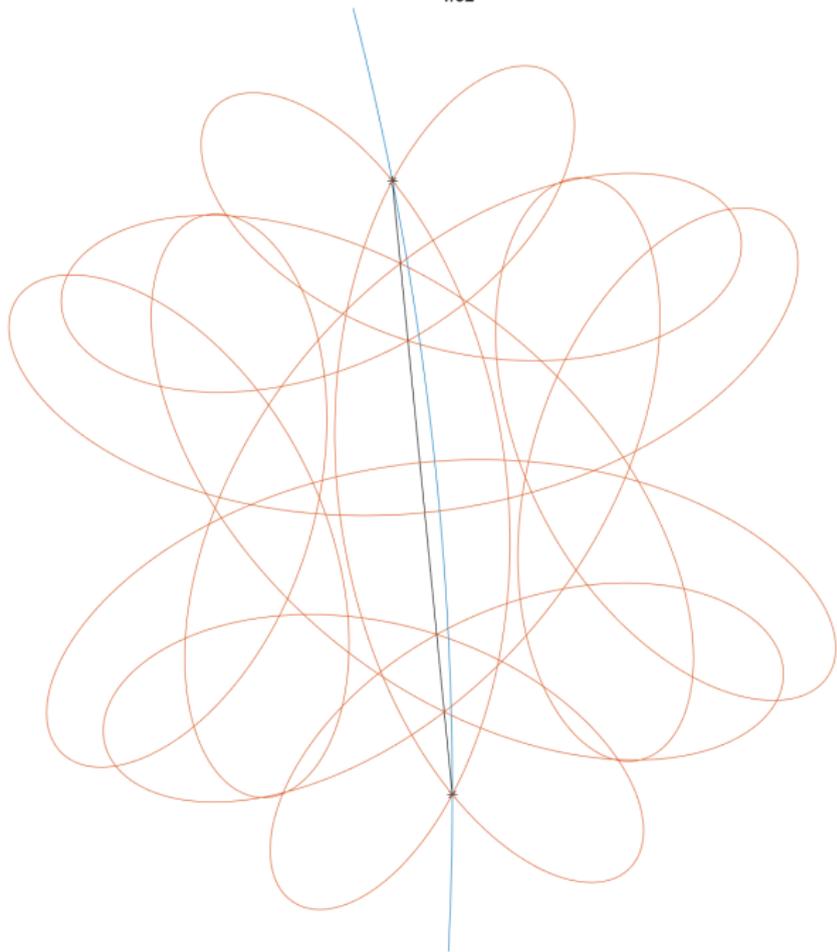


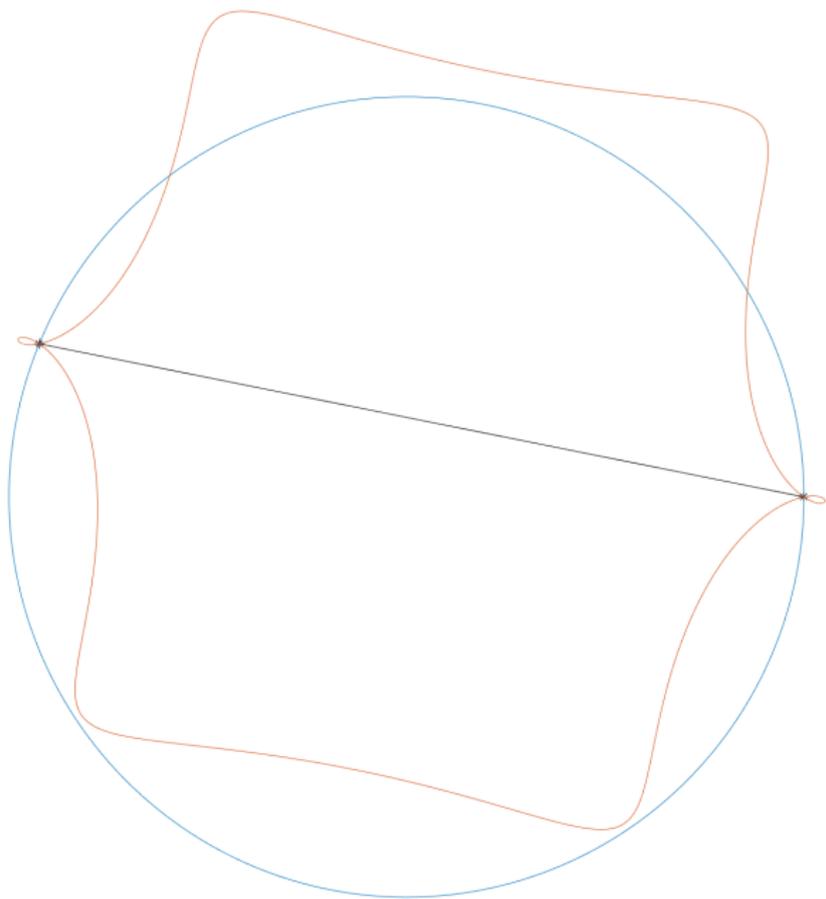


Outros exemplos com $r = \frac{p}{2^q}$, $p, q \in \mathbb{N}$











Sequências degeneradas e diferenciabilidade da curva

Seja A o ângulo do vértice móvel e A' o ângulo do vértice correspondente do pedal. Tem-se:

$$A' = \begin{cases} \pi - 2A & \text{se o triângulo for acutângulo} \\ 2A - \pi & \text{se } A \text{ for obtuso} \\ 2A & \text{se outro ângulo for obtuso} \end{cases}$$

Pelo que

$$A' \equiv \pm 2A \pmod{\pi}$$

Sequências degeneradas e diferenciabilidade da curva

Seja A o ângulo do vértice móvel e A' o ângulo do vértice correspondente do pedal. Tem-se:

$$A' = \begin{cases} \pi - 2A & \text{se o triângulo for acutângulo} \\ 2A - \pi & \text{se } A \text{ for obtuso} \\ 2A & \text{se outro ângulo for obtuso} \end{cases}$$

Pelo que

$$A' \equiv \pm 2A \pmod{\pi}$$

Para o n -ésimo pedal tem-se então:

$$A^{(n)} \equiv \pm 2^n A \pmod{\pi}$$

E, portanto,

$$A^{(n)} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \frac{p}{2^{n+1}}\pi, \text{ para algum } p \in 2\mathbb{N} - 1$$

E, portanto,

$$A^{(n)} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \frac{p}{2^{n+1}}\pi, \text{ para algum } p \in 2\mathbb{N} - 1$$

Ou seja, se A for da forma escrita acima, o n -ésimo pedal é retângulo em A e portanto a $(n + 1)$ -ésima iteração é um segmento, colapsando de seguida no ponto limite.

Dito de outra forma, se $b + c (= A/\pi \text{ ou } 1 - A/\pi) = p/2^q$ o ponto limite é atingido após um número *finito* de iterações (no máximo $q + 1$) da sequência pedal, para todas as posições do ponto A na circunferência.

E, portanto,

$$A^{(n)} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \frac{p}{2^{n+1}}\pi, \text{ para algum } p \in 2\mathbb{N} - 1$$

Ou seja, se A for da forma escrita acima, o n -ésimo pedal é retângulo em A e portanto a $(n + 1)$ -ésima iteração é um segmento, colapsando de seguida no ponto limite.

Dito de outra forma, se $b + c (= A/\pi \text{ ou } 1 - A/\pi) = p/2^q$ o ponto limite é atingido após um número *finito* de iterações (no máximo $q + 1$) da sequência pedal, para todas as posições do ponto A na circunferência.

Conjetura: É possível dispensar o fator 3 do resultado de Manning.

Extensão do Teorema 2 de Manning

Seja agora $r = \frac{p}{2^q}$ com $p \in \mathbb{N}$.

Tem-se:

$$n \geq q \Rightarrow \frac{(-2)^n}{3} r = \frac{m_n}{3}, \text{ para algum } m_n \in \mathbb{Z}$$

Existe um único $y_n \in \{0, 1, 2\}$ tal que $m_n \equiv y_n \pmod{3}$.

Extensão do Teorema 2 de Manning

Seja agora $r = \frac{p}{2^q}$ com $p \in \mathbb{N}$.

Tem-se:

$$n \geq q \Rightarrow \frac{(-2)^n}{3} r = \frac{m_n}{3}, \text{ para algum } m_n \in \mathbb{Z}$$

Existe um único $y_n \in \{0, 1, 2\}$ tal que $m_n \equiv y_n \pmod{3}$.

Mais,

$$m_{n+1} = (-2)m_n \equiv 1m_n \equiv y_n \pmod{3}.$$

Pelo que y_n é o mesmo ($= y$), para todo o $n \geq q$.

Extensão do Teorema 2 de Manning

Seja agora $r = \frac{p}{2^q}$ com $p \in \mathbb{N}$.

Tem-se:

$$n \geq q \Rightarrow \frac{(-2)^n}{3} r = \frac{m_n}{3}, \text{ para algum } m_n \in \mathbb{Z}$$

Existe um único $y_n \in \{0, 1, 2\}$ tal que $m_n \equiv y_n \pmod{3}$.

Mais,

$$m_{n+1} = (-2)m_n \equiv 1m_n \equiv y_n \pmod{3}.$$

Pelo que y_n é o mesmo ($= y$), para todo o $n \geq q$.

Então:

$$n \geq q \Rightarrow \exp\left(2\pi i \frac{(-2)^n}{3} r\right) = \exp\left(2\pi i \frac{y}{3}\right)$$

Pelo que a soma de $\frac{\mathcal{L}(\alpha, \beta_0, \gamma_0)}{\exp\left(2\pi i \frac{\alpha + \beta_0 + \gamma_0}{3}\right)}$ a partir de $n = q$ se

reescreve:

$$\sum_{n=q}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{r-2c}{3} \right) \right. \\ \left. + \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{r+c}{3} \right) \right. \\ \left. + \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{-2r+c}{3} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=q}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{r-2c}{3} \right) \right. \\
& + \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{r+c}{3} \right) \\
& \left. + \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{-2r+c}{3} \right) \right] \\
& = \exp \left(2\pi i \frac{y}{3} \right) \sum_{n=q}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp \left(2\pi i (-2)^{n+1} \frac{c}{3} \right) \right. \\
& \left. + \frac{(-1)^n}{2^n} \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{c}{3} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=q}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{r-2c}{3} \right) \right. \\
& + \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{r+c}{3} \right) \\
& \left. + \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{-2r+c}{3} \right) \right] \\
& = \exp \left(2\pi i \frac{y}{3} \right) \sum_{n=q}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp \left(2\pi i (-2)^{n+1} \frac{c}{3} \right) \right. \\
& \left. + \frac{(-1)^n}{2^n} \exp \left(2\pi i (-2)^n \frac{c}{3} \right) \right] \\
& = \exp \left(2\pi i \frac{y}{3} \right) \frac{(-1)^q}{2^q} \exp \left(2\pi i (-2)^q \frac{c}{3} \right)
\end{aligned}$$

Mais uma vez, a série é afinal uma soma finita e portanto a curva é diferenciável.

Nota: Se $p \in 3\mathbb{N}$, recupera-se o resultado de Manning com $y = 0$.

Referências

-  H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer. *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America, 1967
-  H. Rademacher, O. Toeplitz. *The Enjoyment of Math*. Princeton University Press, 1957
-  P. V. Araújo. *Curso de Geometria*. Gradiva, 2002
-  J. C. Alexander. *The Symbolic Dynamics of the Sequence of Pedal Triangles*. Mathematics Magazine, Vol. 66, No. 3 (Jun., 1993), pp. 147-158
-  J. G. Kingston, J. L. Synge. *The Sequence of Pedal Triangles*. The American Mathematical Monthly, Vol. 95, No. 7 (Aug. - Sep., 1988), pp. 609-620
-  A. Manning. *The limit of a pedal sequence of triangles*. Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 42, No. 4 (Aug., 2010), pp. 673-679