Homologia para conjuntos definíveis em espaços vetoriais ordenados sobre corpos ordenados

Duarte Costa

Tutoria por: Prof. Dr. Mário Edmundo
Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

duartesottomayor3@gmail.com

4 de Setembro, 2020

Overview

1. Lógica de Primeira Ordem
   - Sintaxe
   - Semântica
   - L-estruturas
   - Cálculo de Sequentes
   - Teorema de Henkin
   - Teoremas da Compacidade e de Löwenheim-Skolem
2. Teoria de Modelos
   - Conjuntos definíveis
   - Eliminação de Quantificadores

Lógica de Primeira Ordem

Sintaxe

Linguagem

Uma Linguagem L é um tuplo de símbolos $(\{f_i\}_{i\in I}, \{R_j\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K})$, onde I, J e K são conjuntos arbitrários de índices respetivamente de símbolos de funções, de relações e símbolos de constantes.

Para discutir lógica de primeira ordem, precisamos também dos símbolos lógicos habituais (os conectores $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ e os quantificadores $\exists$ e $\forall$), mas também de variáveis, das quais consideramos um conjunto numerável $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, e de um símbolo para igualdade $\equiv$

Nota

Aqui o símbolo $\equiv$ é apenas sintático e reservamos o símbolo habitual $=$ para a ***Metalinguagem*** que necessitamos para a discussão do tópico.

Sintaxe

Dada uma linguagem $L = (\{f_i\}_{i \in I}, \{R_j\}_{j \in J}, \{c_k\}_{k \in K})$, associamos a cada $i \in I$ e $j \in J$ números naturais, a_i e r_j, chamados de aridades. Podemos agora definir termos e fórmulas associadas a esta linguagem:

L-termos

O conjunto de L-termos é o menor conjunto tal que:

- Cada variável v_n $(n \in \mathbb{N})$ é um L-termo;
- Cada símbolo de constante c_k $(k \in K)$ da linguagem L é um L-termo;
- Se $n \in \mathbb{N}$ e t_1,...,t_{a_i} forem L-termos, então $f_i(t_1, \ldots, t_{a_i})$ é um L-termo.

Sintaxe

L-fórmulas

O conjunto de L-fórmulas é o menor conjunto tal que:

- $\perp$ é uma L-fórmula atómica;
- Se t_1 e t_2 são L-termos, então $t_1 \equiv t_2$ é uma L-fórmula atómica;
- Se t_1,...,t_{r_j} são L-termos, então $R_j(t_1, \ldots, t_{r_j})$ é uma L-fórmula atómica;
- Se ϕ é uma L-fórmula, $\neg\phi$ é uma L-fórmula;
- Se ϕ e ψ são L-fórmulas, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ também são L-fórmulas
- Se ϕ é uma L-fórmula e x é uma variável, $\exists x \phi$ e $\forall x \phi$ são L-fórmulas.

Semântica

L-estruturas

Uma L-estrutura $\mathfrak{A}$ é um tuplo $(M, \mathfrak{a})$, onde M é um conjunto (a que se dá o nome de Universo ou Domínio e também pode ser denotado por $|\mathfrak{A}|$), e $\mathfrak{a}$ é um mapa definido para os símbolos da linguagem L, descrito da seguinte forma:

- Para cada $k \in K$, $c_k^{\mathfrak{A}} := \mathfrak{a}(c_k) \in M$;
- Para cada $j \in J$, $R_j^{\mathfrak{A}} := \mathfrak{a}(R_j) \subseteq M^{r_j}$;
- Para cada $i \in I$, $f_i^{\mathfrak{A}} := \mathfrak{a}(f_i) \colon M^{a_i} \longrightarrow M$;

L-interpretação

Uma L-interpretação $\mathcal{J}$ é um par $(\mathfrak{A}, \beta)$, que consiste numa L-estrutura $\mathfrak{A}$ e de um mapa de atribuição $\beta \colon \{v_n \colon n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow M$

Semântica

Notação

Escrevemos $\beta[a/x]$ para denotar a função de atribuição que cumpre $\beta[a/x](x) = a$, e coincide com β para todas as outras variáveis.
Se $\mathcal{J}$ é a L-interpretação $(\mathfrak{A}, \beta)$, denotamos também por $\mathcal{J}[a/x]$ a L-interpretação $(\mathfrak{A}, \beta[a/x])$

Definida agora uma L-interpretação $\mathcal{J}$, podemos então "interpretar" agora termos e fórmulas na linguagem L, atribuindo valores (elementos do domínio $|\mathfrak{A}|$) aos termos e atribuindo valores de verdade a fórmulas:

Interpretação de L-termos

Dada uma L-interpretação $\mathcal{J} = (\mathfrak{A}, \beta)$, definimos indutivamente uma aplicação que atribui a L-termos elementos de $|\mathfrak{A}|$, utilizando a notação $\mathcal{J}(t)$:

- Para cada variável x, $\mathcal{J}(x) := \beta(x)$;

Semântica

Interpretação de L-termos

- Para cada $k \in K$, $\mathcal{J}(c_k) := c_k^{\mathfrak{A}}$;
- Para cada $i \in I$ e L-termos $t_1, ..., t_{a_i}$, $\mathcal{J}(f_i(t_1, ..., t_{a_i})) := f_i^{\mathfrak{A}}(\mathcal{J}(t_1), ..., \mathcal{J}(t_{a_i}))$

Relação de Satisfação

Definimos indutivamente em L-fórmulas, a relação de satisfação, denotada $\mathcal{J} \vDash \phi$ (que se lê "$\mathcal{J}$ é um modelo de ϕ"), fixada uma L-interpretação $\mathcal{J}$ e uma L-fórmula ϕ:

- $\mathcal{J} \nvDash \perp$;
- Se t_1, t_2 são L-termos, então $\mathcal{J} \vDash t_1 \equiv t_2$ sse $\mathcal{J}(t_1) = \mathcal{J}(t_2)$;
- Se $j \in J$ e $t_1, ..., t_{r_j}$ são L-termos, $\mathcal{J} \vDash R_j(t_1, ..., t_{r_j})$ sse $(\mathcal{J}(t_1), ..., \mathcal{J}(t_{r_j})) \in R_j^{\mathfrak{A}}$;
- Se ϕ é uma L-fórmula, $\mathcal{J} \vDash \neg\phi$ sse $\mathcal{J} \nvDash \phi$;

Relação de Satisfação

- Se ψ, ϕ são L-fórmulas:
  - $\mathcal{J} \models \phi \vee \psi$ sse $\mathcal{J} \models \phi$ ou $\mathcal{J} \models \psi$;
  - $\mathcal{J} \models \phi \wedge \psi$ sse $\mathcal{J} \models \psi$ e $\mathcal{J} \models \phi$;
  - $\mathcal{J} \models \phi \rightarrow \psi$ sse sempre que $\mathcal{J} \models \phi$, $\mathcal{J} \models \psi$;
  - $\mathcal{J} \models \phi \leftrightarrow \psi$ sse $\mathcal{J} \models \phi \rightarrow \psi$ e $\mathcal{J} \models \psi \rightarrow \phi$;
- Se x é uma variável e ϕ uma L-fórmula:
  - $\mathcal{J} \models \forall x \phi$ sse para cada $a \in |\mathfrak{A}|$, $\mathcal{J}[a/x] \models \phi$;
  - $\mathcal{J} \models \exists x \phi$ sse existe $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\mathcal{J}[a/x] \models \phi$;

Relação de Consequência Lógica

Se Φ é um conjunto de L-fórmulas, uma L-fórmula φ diz-se uma consequência lógica de Φ (denotado $\Phi \models \varphi$) se, sempre que uma L-interpretação $\mathcal{J}$ é um modelo de todas as L-fórmulas em Φ, for também um modelo de φ.

L-estruturas

Isomorfismo de L-estruturas

Duas L-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ dizem-se isomorfas se existir um mapa (isomorfismo) $\pi\colon |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ que cumpre as seguintes condições:

- π é uma bijeção;
- Para cada $j \in J$ e $x_1, ..., x_{r_j} \in |\mathfrak{A}|$, $(x_1, ..., x_{r_j}) \in R_j^{\mathfrak{A}}$ sse $(\pi(x_1), ..., \pi(x_{r_j})) \in R_j^{\mathfrak{B}}$;
- Para cada $i \in I$ e $x_1, ..., x_{a_i} \in |\mathfrak{A}|$, $\pi(f_i^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_{a_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(\pi(x_1), ..., \pi(x_{a_i}))$;
- Para cada $k \in K$, $\pi(c_k^{\mathfrak{A}}) = c_k^{\mathfrak{B}}$.

Se tal aplicação existir, denotamos também $\pi\colon |\mathfrak{A}| \cong |\mathfrak{B}|$

Nota

Se duas L-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são isomorfas, temos como consequência imediata que para cada L-sentença φ, $\mathfrak{A} \models \varphi$ sse $\mathfrak{B} \models \varphi$.

$$\text{(Assm)}\quad \frac{}{\Gamma \quad \varphi} \quad \text{if } \varphi \in \Gamma \qquad\qquad \text{(Ant)}\quad \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi} \quad \text{if } \Gamma \subset \Gamma'$$

$$\text{(PC)}\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \varphi\end{array}} \qquad\qquad \text{(Ctr)}\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \varphi\end{array}}$$

$$(\vee\text{A})\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & (\varphi \vee \psi) & \chi\end{array}} \qquad\qquad (\vee\text{S})\quad \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi)}, \quad \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\psi \vee \varphi)}$$

$$(\exists\text{A})\quad \frac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi} \quad \text{if } y \text{ is not free in } \Gamma\ \exists x\varphi\ \psi$$

$$(\exists\text{S})\quad \frac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$$

$$(\equiv)\quad \frac{}{t \equiv t} \qquad\qquad \text{(Sub)}\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & & \varphi\frac{t}{x}\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & t \equiv t' & \varphi\frac{t'}{x}\end{array}}$$

Teorema de Henkin

Lema (Corretude)

Para cada conjunto de L-fórmulas Φ e L-fórmula φ, se $\Phi \vdash \varphi$, então $\Phi \models \varphi$

O recíproco deste Lema não é tão simples. No entanto, podemos refraseá-lo. Precisamos apenas de duas definições:

Consistência e Inconsistência

Um conjunto de L-fórmulas Φ diz-se inconsistente se $\Phi \vdash \perp$ e consistente caso contrário.

Satisfatibilidade

Um conjunto de L-fórmulas Φ diz-se satisfazível se existir uma L-interpretção $\mathcal{J}$ tal que $\mathcal{J} \models \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$.

Teorema de Henkin

Veremos então a seguir que todo o conjunto de L-fórmulas Φ consistente é satisfazível. Assim, se tivéssemos $\Phi \models \varphi$ e $\Phi \nvdash \varphi$, teríamos $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ consistente mas não satisfazível, o que é uma contradição. Para verificarmos esta suposição, recorremos a mais definições:

L-teoria

Dado um conjunto de L-sentenças Φ, a L-teoria T associada é definida como $T := \{\varphi \colon \Phi \vdash \varphi\}$.

Nota

Da definição, imediatamente verificamos que cada L-teoria T satisfaz o seguinte : Para cada L-sentença φ, $T \vdash \varphi$ sse $\varphi \in T$.

Teorema de Henkin

Teoria de Henkin

Uma L-teoria T diz-se de Henkin se para cada L-sentença existencial $\exists x\varphi$, onde x é uma variável livre de φ, existe um L-termo fechado t tal que $(\exists x\varphi \to \varphi[t/x]) \in T$

Extensão maximalmente consistente

Uma Extensão maximalmente consistente de uma L-teoria T consistente é uma L-teoria T' também consistente tal que $T \subseteq T'$ e tal que se $T' \subseteq K$ é uma L-teoria consistente, então $T' = K$.

Nota

Dada uma L-sentença φ e uma L-teoria maximalmente consistente T, facilmente verificamos que $T \vdash \varphi$ ou $T \vdash \neg\varphi$.

Teorema de Henkin

Lema

Se T é uma L-teoria consistente, então T tem uma extensão T' que é de Henkin e maximalmente consistente (não única em geral).

Veremos agora uma construção (resumida) de uma L-estrutura que será modelo de um conjunto de L-sentenças Φ:
Para construir uma L-estrutura $\mathfrak{A}^{\Phi}$, precisamos de construir um domínio A e "interpretações" de todos os símbolos da linguagem L:
Seja M o conjunto de L-termos.
Definimos uma relação de equivalência: $t_1 \sim t_2$:sse $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$

Nota

Facilmente verificamos, que se f e R são símbolos de função e relação respetivamente da linguagem L, de aridade $n \in \mathbb{N}$ e $t_1, t_1' ..., t_n, t_n'$ são L-termos tais que $t_1 \sim t_1', ..., t_n \sim t_n'$, então $f(t_1, ..., t_n) \sim f(t_1', ..., t_n')$ e $\Phi \vdash R(t_1, ..., t_n)$ sse $\Phi \vdash R(t_1', ..., t_n')$.

Definimos então $A := M/\sim$. Precisamos agora apenas de definir as interpretações dos símbolos de L:

- Para $k \in K$, $c_k^{\mathfrak{A}^\Phi} := [c_k]_\sim$;
- Para cada variável x, definimos $\beta(x) := [x]_\sim$;
- Para $i \in I$ e L-termos $t_1, ..., t_{a_i}$, $f_i^{\mathfrak{A}^\Phi}([t_1]_\sim, ..., [t_{a_i}]_\sim) := [f_i(t_1, ..., t_{a_i})]_\sim$;
- Para $j \in J$ e L-termos $t_1, ..., t_{r_j}$, $([t_1]_\sim, ..., [t_{r_j}]_\sim) \in R_j^{\mathfrak{A}^\Phi}$:sse $\Phi \vdash R_j(t_1, ..., t_{r_j})$

Depois de algumas verificações, que se provam por indução em L-termos e L-fórmulas, chegamos ao:

Teorema de Henkin

Se Φ é um conjunto de L-sentenças com uma teoria T associada de Henkin e maximalmente consistente, então: $\mathcal{J}^\Phi \vDash \varphi$ sse $\Phi \vdash \varphi$.
Em particular, Φ é satisfazível.

Teoremas da Compacidade e de Löwenheim-Skolem

Pela definição da relação $\vdash$ e pelo Teorema de Henkin, imediatamente temos:

Teorema da Compacidade

Se Φ é um conjunto de L-sentenças e φ uma L-fórmula, então $\Phi \vDash \varphi$ sse existe um subconjunto finito $\Psi \subseteq \Phi$ tal que $\Psi \vDash \varphi$.

Este teorema faz certamente lembrar o conceito topológico de Compacidade e de facto, o Teorema da Compacidade é uma consequência do seguinte Teorema de Topologia:

Teorema de Tychonoff

Se A é um conjunto e (X_α, τ_α) $(\alpha \in A)$ são espaços topológicos compactos, então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ munido da topologia produto é também um espaço topológico compacto.

Teoremas da Compacidade e de Löwenheim-Skolem

Teorema de Löwenheim-Skolem ("Downward")

Todo o conjunto de L-sentenças satisfazível tem como modelo uma L-interpretação com domínio de cardinalidade igual ou inferior a $max(\aleph_0, |L|)$.
(Onde $|L|$ é a cardinalidade da linguagem, definida como $|L| = |I| + |J| + |K|$)

Teorema de Löwenheim-Skolem ("Upward")

Se Φ é um conjunto de L-sentenças satisfazível que tem como modelo uma L-interpretação com domínio infinito de cardinalidade κ, então para cada cardinal $\kappa \leqslant \mu$, Φ tem um modelo de cardinalidade igual a μ.

Teoria de Modelos

Conjuntos definíveis

Conjunto definível

Seja $\mathfrak{A}$ uma L-estrutura. Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $X \subseteq A^n$ (onde $A = |\mathfrak{A}|$) é um conjunto definível se existe uma L-fórmula $\phi(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m)$ e L-termos fechados $t_1, ..., t_m$ tais que $X = \{(t_1'^{\mathfrak{A}}, ..., t_n'^{\mathfrak{A}}) \colon t_1', ..., t_n'$ são L-termos fechados e $\mathfrak{A} \vDash \phi[t_1', ..., t_n', t_1, ..., t_m / v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m]\}$

Eliminação de Quantificadores

Uma L-teoria T tem eliminação de quantificadores se para cada L-fórmula ϕ, existe uma L-fórmula ψ sem quantificadores tal que: $T \vDash \phi \leftrightarrow \psi$.

Exemplo

Na teoria dos números reais T, temos que:

- $T \vDash \forall x(\neg x \equiv 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y \equiv 1)) \leftrightarrow 0 \equiv 0$;
- $T \vDash \exists x(ax^2 + bx + c \equiv 0) \leftrightarrow [(\neg a \equiv 0 \wedge 0 \leqslant b^2 - 4ac) \vee (a \equiv 0 \wedge (\neg b \equiv 0 \vee c \equiv 0))]$

Se L for uma linguagem com um símbolo de relação de aridade 2 e T uma L-teoria tem eliminação de quantificadores, então dado um seu modelo $\mathcal{J} = (\mathfrak{A}, \beta)$ que interprete o símbolo de relação referido como uma ordem total, os conjuntos definíveis associados serão os semilineares, ou seja, os que serão uma união finita de "pontos" e "intervalos" (possivelmente ilimitados).

Estruturas o-minimais

Estruturas o-minimais

Uma L-estrutura diz-se o-minimal se L tiver um símbolo de ordem de aridade 2 e for interpretado por $\mathfrak{A}$ como uma ordem total e se todo o conjunto definível X puder ser escrito como uma união finita de "pontos" e "intervalos".

Given a language $L = (+, \{\lambda.\}_{\lambda\in\mathbb{K}}, 0, \preceq)$, where $\mathbb{K}$ is an ordered field, we define an ordered vector space $\mathfrak{A}$ as an L-structure with universe M, that constitutes a model for the set of axioms:

- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$;
- $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z)) = ((x + y) + z)$;
- $\forall x (x + 0 = x)$;
- $\forall x (\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x)$, for each $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
- $\forall x (1.x = x)$, where $1 \in \mathbb{K}$ is the multiplicative identity;
- $\forall x \forall y (\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y)$, for each $\lambda \in \mathbb{K}$;
- $\forall x ((\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x)$, for each $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
- $\forall x \forall y (x \preceq y \vee y \preceq x)$;
- $\forall x \forall y (x \preceq y \wedge y \preceq x \longrightarrow y = x)$;
- $\forall x \forall y \forall z (x \preceq y \wedge y \preceq z \longrightarrow x \preceq z)$;
- $\forall x \forall y \forall z (x \preceq y \longrightarrow x + z \preceq y + z)$;
- $\forall x \forall y (x \preceq y \longrightarrow \lambda.x \preceq \lambda.y)$ for all $\lambda \in \mathbb{K}$ for which $0 < \lambda$ holds;

References

Dirk van Dalen - Logic and Structure (2004)

H.D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas - Mathematical Logic (1994)

David Marker - Model Theory: An Introduction

Fim