Homotopia de Quandles Topológicos

João Fernandes, FCTUC
Sob orientação do Prof. Doutor António Salgueiro

4 de Setembro de 2020

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Estrutura

1. Quandles

Estrutura

1. Quandles

2. Homotopia de Quandles

Estrutura

Estrutura

Estrutura

Noção de Quandle

A CLASSIFYING INVARIANT OF KNOTS,
THE KNOT QUANDLE

David JOYCE

Department of Mathematics, Clark University, Worcester, MA 01610, USA

Communicated by S. Eilenberg
Received 14 April 1980

The two operations of conjugation in a group, $x \triangleright y = y^{-1}xy$ and $x \triangleright^{-1} y = yxy^{-1}$ satisfy certain identities. A set with two operations satisfying these identities is called a quandle. The Wirtinger presentation of the knot group involves only relations of the form $y^{-1}xy = z$ and so may be construed as presenting a quandle rather than a group. This quandle, called the knot quandle, is not only an invariant of the knot, but in fact a classifying invariant of the knot.

Noção de Quandle

Definição (Quandle)

Seja X um conjunto e $\triangleright : X \times X \longrightarrow X$ uma operação em X. Dizemos que $(X, \triangleright)$ é um *quandle* se

1. $\forall x \in X : x \triangleright x = x$ (idempotência)
2. $\forall x, z \in X \ \exists | y : z = y \triangleright x$ (quasigrupo à direita)
3. $\forall x, y, z \in X : (x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ (autoassociatividade)

Noção de Quandle

Definição (Quandle)

Seja X um conjunto e $\triangleright : X \times X \longrightarrow X$ uma operação em X. Dizemos que $(X, \triangleright)$ é um *quandle* se

1. $\forall x \in X : x \triangleright x = x$ (idempotência)
2. $\forall x, z \in X \ \exists | y : z = y \triangleright x$ (quasigrupo à direita)
3. $\forall x, y, z \in X : (x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ (autoassociatividade)

Se X for um espaço topológico e $\triangleright$ for uma aplicação contínua tal que R_x é um homeomorfismo para todo $x \in X$, então chamamos a $(X, \triangleright)$ um *quandle topológico*.

1. $\forall x \in X : x \triangleright x = x$ (idempotência)
2. $\forall x, z \in X\ \exists | y : z = y \triangleright x$ (quasigrupo à direita)
3. $\forall x, y, z \in X : (x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ (autoassociatividade)

Uma aplicação contínua $h : (X, \triangleright) \to (Y, \diamond)$ é um *homomorfismo* se $h(x \triangleright y) = h(x) \diamond h(y)$.

1. $\forall x \in X : x \triangleright x = x$ (idempotência)
2. $\forall x, z \in X \ \exists | y : z = y \triangleright x$ (quasigrupo à direita)
3. $\forall x, y, z \in X : (x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ (autoassociatividade)

Uma aplicação contínua $h : (X, \triangleright) \to (Y, \diamond)$ é um *homomorfismo* se $h(x \triangleright y) = h(x) \diamond h(y)$. Chamamos *automorfismo* se $X = Y$ e h for homeomorfismo.

1. $\forall x \in X : x \triangleright x = x$ (idempotência)
2. $\forall x, z \in X \ \exists | y : z = y \triangleright x$ (quasigrupo à direita)
3. $\forall x, y, z \in X : (x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ (autoassociatividade)

Uma aplicação contínua $h : (X, \triangleright) \to (Y, \diamond)$ é um *homomorfismo* se $h(x \triangleright y) = h(x) \diamond h(y)$. Chamamos *automorfismo* se $X = Y$ e h for homeomorfismo.

Facto: *As multiplicações à direita são automorfismos.*

1. $\forall x \in X : x \triangleright x = x$ (idempotência)
2. $\forall x, z \in X \ \exists | y : z = y \triangleright x$ (quasigrupo à direita)
3. $\forall x, y, z \in X : (x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ (autoassociatividade)

Uma aplicação contínua $h : (X, \triangleright) \to (Y, \diamond)$ é um *homomorfismo* se $h(x \triangleright y) = h(x) \diamond h(y)$. Chamamos *automorfismo* se $X = Y$ e h for homeomorfismo.

Facto: *As multiplicações à direita são automorfismos.*

Definição (Quandle)

Dizemos que $(X, \triangleright)$ é um quandle se a operação for idempotente e as multiplicações à direita forem automorfismos.

Exemplos

1. Seja X um conjunto arbitrário, a operação $\triangleright$ tal que $\forall x, y \in X$ $x \triangleright y = x$ é um quandle.

Exemplos

1. Seja X um conjunto arbitrário, a operação $\triangleright$ tal que $\forall x, y \in X$ $x \triangleright y = x$ é um quandle.
2. Seja G um grupo topológico (Hausdorff e loc. compacto) e $Aut(G)$ o grupo de automorfismos de G. Para cada $\sigma \in Aut(G)$, a operação $\triangle_\sigma$ em G definida por $x \triangle_\sigma y = \sigma(y^{-1}x)y$ é um quandle.

Exemplos

1. Seja X um conjunto arbitrário, a operação $\triangleright$ tal que $\forall x, y \in X$ $x \triangleright y = x$ é um quandle.
2. Seja G um grupo topológico (Hausdorff e loc. compacto) e $Aut(G)$ o grupo de automorfismos de G. Para cada $\sigma \in Aut(G)$, a operação $\triangle_\sigma$ em G definida por $x \triangle_\sigma y = \sigma(y^{-1}x)y$ é um quandle.
   2.1 Se $\sigma = 1$, temos $x \triangle y = y^{-1}xy$.

Exemplos

1. Seja X um conjunto arbitrário, a operação $\triangleright$ tal que $\forall x, y \in X$ $x \triangleright y = x$ é um quandle.
2. Seja G um grupo topológico (Hausdorff e loc. compacto) e $Aut(G)$ o grupo de automorfismos de G. Para cada $\sigma \in Aut(G)$, a operação $\triangle_\sigma$ em G definida por $x \triangle_\sigma y = \sigma(y^{-1}x)y$ é um quandle.
   - 2.1 Se $\sigma = 1$, temos $x \triangle y = y^{-1}xy$.
   - 2.2 Se $\sigma = -1$, temos $x \triangle_- y = yx^{-1}y$.

Exemplos

1. Seja X um conjunto arbitrário, a operação $\triangleright$ tal que $\forall x, y \in X$ $x \triangleright y = x$ é um quandle.
2. Seja G um grupo topológico (Hausdorff e loc. compacto) e $Aut(G)$ o grupo de automorfismos de G. Para cada $\sigma \in Aut(G)$, a operação $\triangle_\sigma$ em G definida por $x \triangle_\sigma y = \sigma(y^{-1}x)y$ é um quandle.
   2.1 Se $\sigma = 1$, temos $x \triangle y = y^{-1}xy$.
   2.2 Se $\sigma = -1$, temos $x \triangle_- y = yx^{-1}y$.
   2.3 Em $\mathbb{R}^n$, temos $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$, onde $T \in GL_n(\mathbb{R})$

Exemplos

1. Seja X um conjunto arbitrário, a operação $\triangleright$ tal que $\forall x, y \in X$ $x \triangleright y = x$ é um quandle.
2. Seja G um grupo topológico (Hausdorff e loc. compacto) e $Aut(G)$ o grupo de automorfismos de G. Para cada $\sigma \in Aut(G)$, a operação $\triangle_\sigma$ em G definida por $x \triangle_\sigma y = \sigma(y^{-1}x)y$ é um quandle.
   2.1 Se $\sigma = 1$, temos $x \triangle y = y^{-1}xy$.
   2.2 Se $\sigma = -1$, temos $x \triangle_- y = yx^{-1}y$.
   2.3 Em $\mathbb{R}^n$, temos $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$, onde $T \in GL_n(\mathbb{R})$
3. Para $\mathbb{S}^n$, a esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$, a operação $x \triangleright y = 2\langle x, y\rangle y - x$ é um quandle topológico.

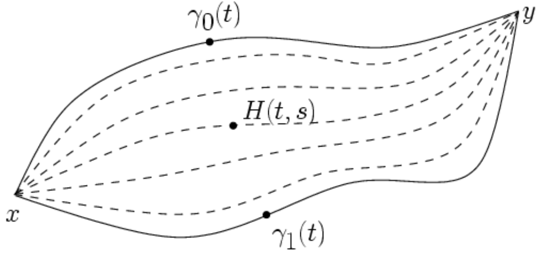
A ideia de Homotopia

Duas funções contínuas $f, g : X \to Y$ são *homotópicas* se existir uma função contínua $H : X \times [0,1] \to Y$ onde $H(t,0) = f(t)$ e $H(t,1) = g(t)$.

A ideia de Homotopia

Duas funções contínuas $f, g : X \to Y$ são *homotópicas* se existir uma função contínua $H : X \times [0,1] \to Y$ onde $H(t,0) = f(t)$ e $H(t,1) = g(t)$.

Duas curvas $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to Y$ são *homotópicas* se forem homotópicas como funções, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ e $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$



A ideia de Homotopia

Consideremos o conjunto de curvas em Y (conexo por arcos) tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Definimos o grupo fundamental $\pi_1(Y, x)$ de Y como o quociente deste conjunto pela relação de homotopia com a operação de justaposição.

A ideia de Homotopia

Consideremos o conjunto de curvas em Y (conexo por arcos) tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Definimos o grupo fundamental $\pi_1(Y, x)$ de Y como o quociente deste conjunto pela relação de homotopia com a operação de justaposição.

Uma propriedade importante é que qualquer função contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.

A ideia de Homotopia

Consideremos o conjunto de curvas em Y (conexo por arcos) tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Definimos o grupo fundamental $\pi_1(Y, x)$ de Y como o quociente deste conjunto pela relação de homotopia com a operação de justaposição.

Uma propriedade importante é que qualquer função contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.Duas aplicações homotópicas induzem o mesmo homomorfismo.

A ideia de Homotopia

Consideremos o conjunto de curvas em Y (conexo por arcos) tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Definimos o grupo fundamental $\pi_1(Y, x)$ de Y como o quociente deste conjunto pela relação de homotopia com a operação de justaposição.

Uma propriedade importante é que qualquer função contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.Duas aplicações homotópicas induzem o mesmo homomorfismo.

Este grupo é **invariante por homeomorfismo** e é muito usado para estudar propriedades topológicas do espaço.

A ideia de Homotopia

Consideremos o conjunto de curvas em Y (conexo por arcos) tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Definimos o grupo fundamental $\pi_1(Y, x)$ de Y como o quociente deste conjunto pela relação de homotopia com a operação de justaposição.

Uma propriedade importante é que qualquer função contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.Duas aplicações homotópicas induzem o mesmo homomorfismo.

Este grupo é **invariante por homeomorfismo** e é muito usado para estudar propriedades topológicas do espaço.

1. $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$

A ideia de Homotopia

Consideremos o conjunto de curvas em Y (conexo por arcos) tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Definimos o grupo fundamental $\pi_1(Y, x)$ de Y como o quociente deste conjunto pela relação de homotopia com a operação de justaposição.

Uma propriedade importante é que qualquer função contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.Duas aplicações homotópicas induzem o mesmo homomorfismo.

Este grupo é **invariante por homeomorfismo** e é muito usado para estudar propriedades topológicas do espaço.

1. $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$
2. $\pi_1(\mathbb{R}^n) \simeq 1$, mas $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash 0) \simeq \mathbb{Z}$.

A ideia de Homotopia

Consideremos o conjunto de curvas em Y (conexo por arcos) tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Definimos o grupo fundamental $\pi_1(Y, x)$ de Y como o quociente deste conjunto pela relação de homotopia com a operação de justaposição.

Uma propriedade importante é que qualquer função contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.Duas aplicações homotópicas induzem o mesmo homomorfismo.

Este grupo é **invariante por homeomorfismo** e é muito usado para estudar propriedades topológicas do espaço.

1. $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$
2. $\pi_1(\mathbb{R}^n) \simeq 1$, mas $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash 0) \simeq \mathbb{Z}$.
3. $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

A ideia de Homotopia

Consideremos o conjunto de curvas em Y (conexo por arcos) tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Definimos o grupo fundamental $\pi_1(Y, x)$ de Y como o quociente deste conjunto pela relação de homotopia com a operação de justaposição.

Uma propriedade importante é que qualquer função contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.Duas aplicações homotópicas induzem o mesmo homomorfismo.

Este grupo é **invariante por homeomorfismo** e é muito usado para estudar propriedades topológicas do espaço.

1. $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$
2. $\pi_1(\mathbb{R}^n) \simeq 1$, mas $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash 0) \simeq \mathbb{Z}$.
3. $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

A ideia de Homotopia de Quandles

Considerando os quandles de Alexander em $\mathbb{R}$, dado $\lambda \neq 0$ temos

$$x \triangle_\lambda y = \lambda x + (1 - \lambda) y$$

Vemos que podemos variar o λ (quase sem restrições), deformando um quandle noutro, através de outros quandles.

A ideia de Homotopia de Quandles

Considerando os quandles de Alexander em $\mathbb{R}$, dado $\lambda \neq 0$ temos

$$x \triangle_\lambda y = \lambda x + (1-\lambda)y$$

Vemos que podemos variar o λ (quase sem restrições), deformando um quandle noutro, através de outros quandles. Motivados por este caso, definimos

Definição

Sejam $(X, \triangleright)$ e $(X, \diamond)$ quandles topológicos. Se existir $H : X \times X \times [0,1] \longrightarrow X$ contínua tal que $\forall x, y \in X$:

1. $H(x,y,0) = x \triangleright y$ e $H(x,y,1) = x \diamond y$
2. $\forall t \in [0,1]$, $H_t(x,y) := H(x,y,t)$ é uma operação de quandle topológico em X

dizemos que $(X, \triangleright)$ e $(X, \diamond)$ são *homotópicos por quandles*.

Ponto de Partida: $\mathbb{R}$

Dado $\lambda \neq 0$, $x \triangle_\lambda y = \lambda x + (1-\lambda)y$

Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal claramente podemos construir uma homotopia. E se tiverem sinais diferentes?

Ponto de Partida: $\mathbb{R}$

Dado $\lambda \neq 0$, $x \triangle_\lambda y = \lambda x + (1 - \lambda) y$

Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal claramente podemos construir uma homotopia. E se tiverem sinais diferentes? A resposta é **não**.

Ponto de Partida: $\mathbb{R}$

Dado $\lambda \neq 0$, $x \triangle_\lambda y = \lambda x + (1-\lambda)y$

Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal claramente podemos construir uma homotopia. E se tiverem sinais diferentes? A resposta é **não**.

Suponhamos que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Se os quandles forem homotópicos, as multiplicações à direita por 0 são homotópicas por homeomorfismos que fixam o 0.

Ponto de Partida: $\mathbb{R}$

Dado $\lambda \neq 0$, $x \triangle_\lambda y = \lambda x + (1-\lambda) y$

Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal claramente podemos construir uma homotopia. E se tiverem sinais diferentes? A resposta é **não**.

Suponhamos que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Se os quandles forem homotópicos, as multiplicações à direita por 0 são homotópicas por homeomorfismos que fixam o 0.

Então temos $H(x, 0, 0) = x$ e $H(x, 0, 1) = -x$, logo existe um $t \in [0, 1]$ onde $H(t, x, 0) = 0$, contradição.

Ponto de Partida: $\mathbb{R}$

Dado $\lambda \neq 0$, $x \triangle_\lambda y = \lambda x + (1-\lambda)y$

Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal claramente podemos construir uma homotopia. E se tiverem sinais diferentes? A resposta é **não**.

Suponhamos que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Se os quandles forem homotópicos, as multiplicações à direita por 0 são homotópicas por homeomorfismos que fixam o 0.

Então temos $H(x,0,0) = x$ e $H(x,0,1) = -x$, logo existe um $t \in [0,1]$ onde $H(t,x,0) = 0$, contradição.

Proposição

Sejam $\lambda, \sigma \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Então

$$(\mathbb{R}, \triangle_\lambda) \sim (\mathbb{R}, \triangle_\sigma) \Leftrightarrow \lambda\sigma > 0$$

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Lema

Se $T, T' \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $det(T)det(T') > 0$ então existe um caminho em $GL_n(\mathbb{R})$ entre T e T'.

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Lema

Se $T, T' \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $det(T)det(T') > 0$ então existe um caminho em $GL_n(\mathbb{R})$ entre T e T'.

Logo temos no máximo duas classes, tendo em conta o sinal do determinante.

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Lema

Se $T, T' \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $det(T)det(T') > 0$ então existe um caminho em $GL_n(\mathbb{R})$ entre T e T'.

Logo temos no máximo duas classes, tendo em conta o sinal do determinante.

Estas classes são distintas?

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Consideremos o caso $n = 2$. Consideremos $T = I$ e T' a matriz de reflexão sobre o eixo dos xx.

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Consideremos o caso $n = 2$. Consideremos $T = I$ e T' a matriz de reflexão sobre o eixo dos xx.

Seja $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ uma parameterização da circunferência unitária.

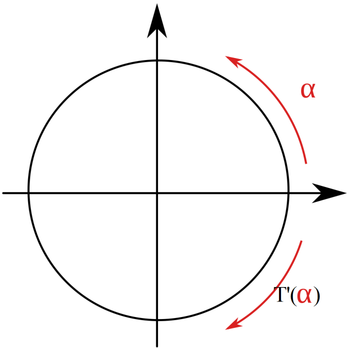
Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Consideremos o caso $n = 2$. Consideremos $T = I$ e T' a matriz de reflexão sobre o eixo dos xx.

Seja $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$ uma parameterização da circunferência unitária.

Podemos ver que a ação da multiplicação à direita por 0 de $\triangle_T$ é trivial e a de $\triangle_{T'}$ inverte a orientação da curva.



Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Lema

Se dois quandles em X são homotópicos, então as multiplicações à direita por $x \in X$ são homotópicas como funções. Mais, as suas restrições a $X \backslash \{x\}$ também são homotópicas.

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

Lema

Se dois quandles em X são homotópicos, então as multiplicações à direita por $x \in X$ são homotópicas como funções. Mais, as suas restrições a $X \backslash \{x\}$ também são homotópicas.

Como $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash 0) \simeq \mathbb{Z}$ e α é um gerador de $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash 0)$, dois "quandles" homotópicos em $\mathbb{R}^2$ não podem induzir orientações diferentes de α.

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

O resultado geral também é verdade.

Proposição

Sejam $T, \widetilde{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *aplicações lineares não singulares. Então*

$$(\mathbb{R}^n, \triangle_T) \sim (\mathbb{R}^n, \triangle_{\widetilde{T}}) \Leftrightarrow det(T)det(\widetilde{T}) > 0$$

Caso geral: $\mathbb{R}^n$

Dado $T \in GL_n(\mathbb{R})$, $x \triangle_T y = Tx + (I - T)y$

O resultado geral também é verdade.

Proposição

Sejam $T, \widetilde{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *aplicações lineares não singulares. Então*

$$(\mathbb{R}^n, \triangle_T) \sim (\mathbb{R}^n, \triangle_{\widetilde{T}}) \Leftrightarrow det(T)det(\widetilde{T}) > 0$$

Equivalentemente, temos que o espaço de classes de homotopia de quandles de Alexander $\triangle(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$
2. $\triangle(GL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$
2. $\triangle(GL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3. $\triangle(GL_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}_2$

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$
2. $\triangle(GL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3. $\triangle(GL_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}_2$
4. Temos $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$, por isso $\triangle(\mathbb{S}^3) \simeq 1$.

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$
2. $\triangle(GL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3. $\triangle(GL_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}_2$
4. Temos $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$, por isso $\triangle(\mathbb{S}^3) \simeq 1$.

Será que temos sempre $\triangle(G) \simeq \pi_0(Aut(G))$?

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$
2. $\triangle(GL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3. $\triangle(GL_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}_2$
4. Temos $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$, por isso $\triangle(\mathbb{S}^3) \simeq 1$.

Será que temos sempre $\triangle(G) \simeq \pi_0(Aut(G))$?

- Quandles *d-Diferenciáveis*/

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$
2. $\triangle(GL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3. $\triangle(GL_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}_2$
4. Temos $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$, por isso $\triangle(\mathbb{S}^3) \simeq 1$.

Será que temos sempre $\triangle(G) \simeq \pi_0(Aut(G))$?

- Quandles *d-Diferenciáveis*$/\sim \ \simeq \pi_0(Dif_0(X))$?
- Quandles Simétricos/

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$
2. $\triangle(GL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3. $\triangle(GL_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}_2$
4. Temos $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$, por isso $\triangle(\mathbb{S}^3) \simeq 1$.

Será que temos sempre $\triangle(G) \simeq \pi_0(Aut(G))$?

- Quandles *d-Diferenciáveis*$/\sim\ \simeq \pi_0(Dif_0(X))$?
- Quandles Simétricos$/\sim\ \simeq \pi_0(Isom_0(X))$?
- (Quandles Polinomiais)

Resultados Análogos

Usando técnicas semelhantes, obtemos os seguintes resultados.

1. $\triangle(\mathbb{C}^n) \simeq 1$
2. $\triangle(GL_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3. $\triangle(GL_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}_2$
4. Temos $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$, por isso $\triangle(\mathbb{S}^3) \simeq 1$.

Será que temos sempre $\triangle(G) \simeq \pi_0(Aut(G))$?

- Quandles *d-Diferenciáveis*$/\sim\ \simeq \pi_0(Dif_0(X))$?
- Quandles Simétricos$/\sim\ \simeq \pi_0(Isom_0(X))$?
- (Quandles Polinomiais)

Será que temos as mesmas classes quando exigimos isotopia por estas classes?

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

O *n-Toro* $\mathbb{T}^n$ é o produto de n círculos $\mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$ ou, equivalentemente, o quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

O *n-Toro* $\mathbb{T}^n$ é o produto de n círculos $\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ ou, equivalentemente, o quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Podemos construir quandles de Alexander com $\sigma \in Aut(\mathbb{T}^n) \simeq Aut(\mathbb{Z}^n) \simeq GL_n(\mathbb{Z})$.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

O *n-Toro* $\mathbb{T}^n$ é o produto de n círculos $\mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$ ou, equivalentemente, o quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Podemos construir quandles de Alexander com $\sigma \in Aut(\mathbb{T}^n) \simeq Aut(\mathbb{Z}^n) \simeq GL_n(\mathbb{Z})$.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

O *n-Toro* $\mathbb{T}^n$ é o produto de n círculos $\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ ou, equivalentemente, o quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Podemos construir quandles de Alexander com $\sigma \in Aut(\mathbb{T}^n) \simeq Aut(\mathbb{Z}^n) \simeq GL_n(\mathbb{Z})$.

Apesar do grupo ser discreto, será que temos classes com mais do que um elemento?

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Mapping Class Group

Definição

Seja X um espaço e $Homeo(X)$, o espaço de homeomorfismos de X para ele próprio. Então o *Mapping Class Group* $(MCG(X))$ de X é $\pi_0(Homeo(X))$.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Mapping Class Group

Definição

Seja X um espaço e $Homeo(X)$, o espaço de homeomorfismos de X para ele próprio. Então o *Mapping Class Group* $(MCG(X))$ de X é $\pi_0(Homeo(X))$.

Alguns exemplos:

1. $MCG(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$

Definição

Seja X um espaço e $Homeo(X)$, o espaço de homeomorfismos de X para ele próprio. Então o *Mapping Class Group* $(MCG(X))$ de X é $\pi_0(Homeo(X))$.

Alguns exemplos:

1. $MCG(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$
2. $MCG(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$

Definição

Seja X um espaço e $Homeo(X)$, o espaço de homeomorfismos de X para ele próprio. Então o *Mapping Class Group* $(MCG(X))$ de X é $\pi_0(Homeo(X))$.

Alguns exemplos:

1. $MCG(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$
2. $MCG(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$

Se dois quandles em X, tiverem multiplicações à direita por $x \in X$ em classes diferentes do $MCG(X)$, eles não podem ser homotópicos.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Mapping Class group de $\mathbb{T}^2 \simeq GL_2(\mathbb{Z})$

Relembremos: *Qualquer homeomorfismo* $f : X \to X$ *induz um automorfismo* $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Mapping Class group de $\mathbb{T}^2 \simeq GL_2(\mathbb{Z})$

Relembremos: *Qualquer homeomorfismo* $f : X \to X$ *induz um automorfismo* $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$.

Lema

Em $\mathbb{T}^2$*, qualquer automorfismo de* $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ *é induzido por um homeomorfismo de* $Homeo(\mathbb{T}^2)$,

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Mapping Class group de $\mathbb{T}^2 \simeq GL_2(\mathbb{Z})$

Relembremos: *Qualquer homeomorfismo $f : X \to X$ induz um automorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$.*

Lema

*Em $\mathbb{T}^2$, qualquer automorfismo de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é induzido por um homeomorfismo de $Homeo(\mathbb{T}^2)$,**único a menos de homotopia**.*

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Mapping Class group de $\mathbb{T}^2 \simeq GL_2(\mathbb{Z})$

Relembremos: *Qualquer homeomorfismo $f : X \to X$ induz um automorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$.*

Lema

*Em $\mathbb{T}^2$, qualquer automorfismo de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é induzido por um homeomorfismo de $Homeo(\mathbb{T}^2)$,**único a menos de homotopia**.*

Logo existe uma bijeção entre $Aut(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \simeq Aut(\mathbb{Z}^2) \simeq GL_2(\mathbb{Z})$ e $MCG(\mathbb{T}^2)$

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Mapping Class group de $\mathbb{T}^2 \simeq GL_2(\mathbb{Z})$

Relembremos: *Qualquer homeomorfismo* $f : X \to X$ *induz um automorfismo* $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$.

Lema

*Em $\mathbb{T}^2$, qualquer automorfismo de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é induzido por um homeomorfismo de $Homeo(\mathbb{T}^2)$,**único a menos de homotopia**.*

Logo existe uma bijeção entre $Aut(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \simeq Aut(\mathbb{Z}^2) \simeq GL_2(\mathbb{Z})$ e $MCG(\mathbb{T}^2)$

Mais, para cada elemento de $GL_2(\mathbb{Z})$ temos uma ação em $\mathbb{T}^2$ que induz esse isomorfismo de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$, logo não temos duas homotópicas

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

No caso geral, temos $GL_n(\mathbb{Z}) \subset MCG(\mathbb{T}^n)$ logo obtemos o resultado.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

No caso geral, temos $GL_n(\mathbb{Z}) \subset MCG(\mathbb{T}^n)$ logo obtemos o resultado.

Proposição

Há uma infinidade de classes de homotopia por quandles em $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$.

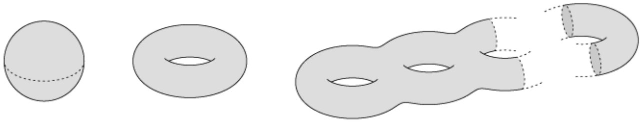
Caso 2: $\mathbb{T}^n$

No caso geral, temos $GL_n(\mathbb{Z}) \subset MCG(\mathbb{T}^n)$ logo obtemos o resultado.

Proposição

Há uma infinidade de classes de homotopia por quandles em $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$.

E para superfícies de género maior? **Não tem estrutura de grupo** (topológico)



Temos que qualquer superfície pode ser escrita como o quociente $\mathbb{H}/\Gamma$, onde $\Gamma \leq PSL_2(\mathbb{R})$ discreto.

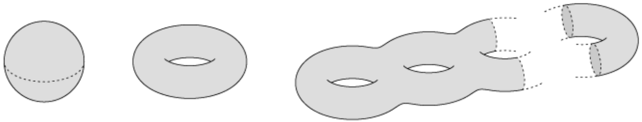
Caso 2: $\mathbb{T}^n$

No caso geral, temos $GL_n(\mathbb{Z}) \subset MCG(\mathbb{T}^n)$ logo obtemos o resultado.

Proposição

Há uma infinidade de classes de homotopia por quandles em $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$.

E para superfícies de género maior? **Não tem estrutura de grupo** (topológico)



Temos que qualquer superfície pode ser escrita como o quociente $\mathbb{H}/\Gamma$, onde $\Gamma \leq PSL_2(\mathbb{R})$ discreto. Pelo Teorema de Dehn-Nielsen-Baer temos $MCG(S_g) \simeq Out(\pi_1(S_g))$.

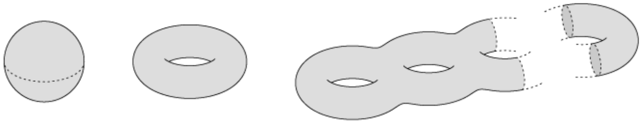
Caso 2: $\mathbb{T}^n$

No caso geral, temos $GL_n(\mathbb{Z}) \subset MCG(\mathbb{T}^n)$ logo obtemos o resultado.

Proposição

Há uma infinidade de classes de homotopia por quandles em $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$.

E para superfícies de género maior? **Não tem estrutura de grupo** (topológico)



Temos que qualquer superfície pode ser escrita como o quociente $\mathbb{H}/\Gamma$, onde $\Gamma \leq PSL_2(\mathbb{R})$ discreto. Pelo Teorema de Dehn-Nielsen-Baer temos $MCG(S_g) \simeq Out(\pi_1(S_g))$.

Será que também temos uma infinidade de classes?

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Qual é a relação entre as classes de homotopia de X e $MCG(X)$?

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Qual é a relação entre as classes de homotopia de X e $MCG(X)$?

Consideremos $MCG_x(X)$, para $x \in X$.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Qual é a relação entre as classes de homotopia de X e $MCG(X)$?

Consideremos $MCG_x(X)$, para $x \in X$.

1. **Existência**: Para qualquer classe σ de $MCG_x(X)$, existe um quandle com σ como multiplicação à direita por x.

Caso 2: $\mathbb{T}^n$

Qual é a relação entre as classes de homotopia de X e $MCG(X)$?

Consideremos $MCG_x(X)$, para $x \in X$.

1. **Existência**: Para qualquer classe σ de $MCG_x(X)$, existe um quandle com σ como multiplicação à direita por x.
2. **Unicidade**: Em que condições dizemos que se as multiplicações à direita forem homotópicas em $MCG_x(X)$, então os quandles são homotópicos?

Conclusão

FUNDAÇÃO
CALOUSTE GULBENKIAN