

# Identidades em álgebras de Lie e teoremas clássicos de geometria projetiva

Ana Sofia Guerreiro

LMAC (IST-UL)

Encontro Nacional - 3-4 Setembro 2020



FUNDAÇÃO  
CALOUSTE GULBENKIAN

# Índice

- 1 Identities in Lie algebras
- 2 Pappus' theorem and Tomihisa's identity
- 3 Desargues' theorem
- 4 Generalizations of Pappus' theorem

## Identities in Lie algebras

In 2005, Arnold showed:

**Identities in Lie algebras  $\longleftrightarrow$  Pappus' Theorem**

- In the space,  $\mathcal{Q}$ , of quadratic forms on the symplectic plane  $(q, p)$ .

$$\mathcal{Q} = \{ap^2 + 2bpq + cq^2\}$$

used the Poisson bracket

$$\{Q_1, Q_2\} = \frac{\partial Q_1}{\partial p} \frac{\partial Q_2}{\partial q} - \frac{\partial Q_2}{\partial p} \frac{\partial Q_1}{\partial q} := [Q_1, Q_2].$$

- The Pappus' Theorem is less known in hyperbolic geometry and Arnold's proof is considered as the most "elegant".

# Identidades em álgebras de Lie

- **Identidade de Jacobi** para o parêntesis de Lie  $[ , ]$ :

$$[F_1, [F_2, F_3]] + [F_3, [F_1, F_2]] + [F_2, [F_3, F_1]] = 0 \quad (\text{permutações cíclicas})$$

- **Identidade de Tomihisa** (para álgebras de Lie reais de dimensão 3)

$$\underbrace{[F_1, [[F_2, F_3], [F_4, F_5]]] + [F_5, [[F_2, F_1], [F_4, F_3]]] + [F_3, [[F_2, F_5], [F_4, F_1]]]}_{F_2, F_4 \text{ fixos e permutações cíclicas de } F_1, F_3, F_5} = 0.$$

# Identidade de Tomihisa

Tomihisa (2009):

- Mostrou a Identidade de Tomihisa em  $\mathcal{Q}$ .
- Usou a identificação:  $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{RP}^2$

$$Q = ap^2 + 2bpq + cq^2 \mapsto \varphi(Q) := \left[ \frac{a-c}{2} : b : \frac{a+c}{2} \right]$$

- Usou a aplicação bilinear de Arnold  $\langle , \rangle_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle Q_1, Q_2 \rangle_{\mathcal{Q}} = b_1 b_2 - \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1}{2}, \quad (1)$$

relativa à qual se obtém a dualidade projectiva.

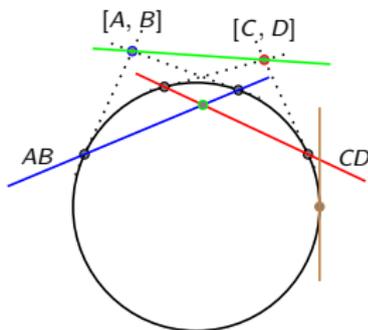
- Provou vários teoremas de geometria projectiva: Pappus, Desargues, Pascal e Brianchon.

# Dualidade e parêntesis de Lie

- $\varphi(Q_1)^* = \varphi(Q_2) \iff \langle Q_1, Q_2 \rangle_{\mathcal{Q}} = 0;$

# Dualidade e parêntesis de Lie

- $\varphi(Q_1)^* = \varphi(Q_2) \iff \langle Q_1, Q_2 \rangle_{\mathcal{Q}} = 0$ ;
- $[A, B] \rightsquigarrow$  o ponto dual da reta que passa por  $A$  e  $B$ ;
- $[[A, B], [C, D]] \rightsquigarrow$  o ponto de interseção das retas  $AB$  e  $CD$ .



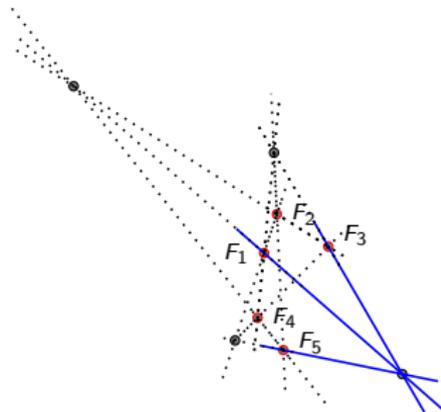
Na figura,  $A$ ,  $B$  e  $[A, B]$  são notações de  $\varphi(Q_A)$ ,  $\varphi(Q_B)$ , e  $\varphi([Q_A, Q_B])$

# Identidade Tomihisa & Geometria

## Interpretação Geométrica da IT

$$\underbrace{[F_1, [[F_2, F_3], [F_4, F_5]]]}_{\substack{\text{dual da reta} \\ F_1(F_2F_3 \cap F_4F_5)}} + \underbrace{[F_5, [[F_2, F_1], [F_4, F_3]]]}_{\substack{\text{dual da reta} \\ F_5(F_1F_2 \cap F_3F_4)}} + \underbrace{[F_3, [[F_2, F_5], [F_4, F_1]]]}_{\substack{\text{dual da reta} \\ F_3(F_2F_5 \cap F_4F_1)}} = 0$$

- A IT diz-nos: As três retas  $F_1(F_2F_3 \cap F_4F_5)$ ,  $F_5(F_1F_2 \cap F_3F_4)$  e  $F_3(F_2F_5 \cap F_4F_1)$  são concorrentes.



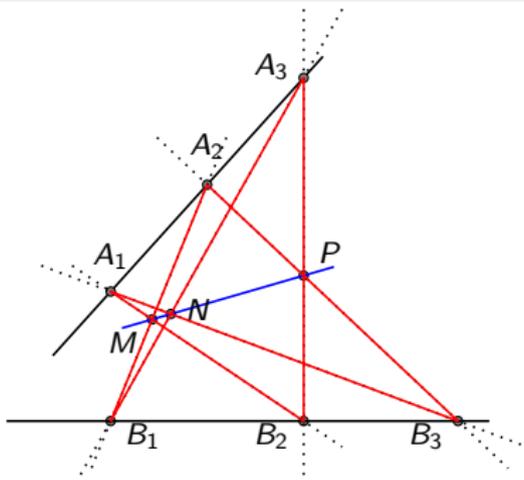
# Teorema de Pappus e identidade de Tomihisa

## Teorema (Pappus)

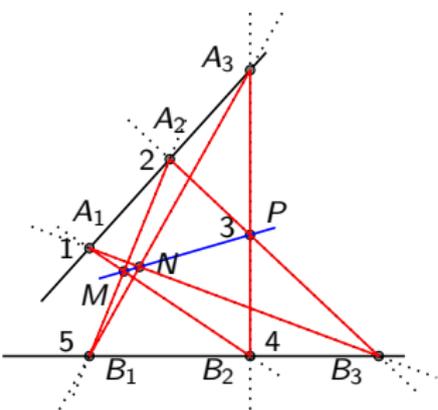
Dados dois ternos de pontos colineares,  $(A_1, A_2, A_3)$ ,  $(B_1, B_2, B_3)$ , os pontos

$$P = A_2B_3 \cap A_3B_2, \quad M = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad N = A_1B_3 \cap A_3B_1$$

são colineares.



# Pappus via Tomihisa



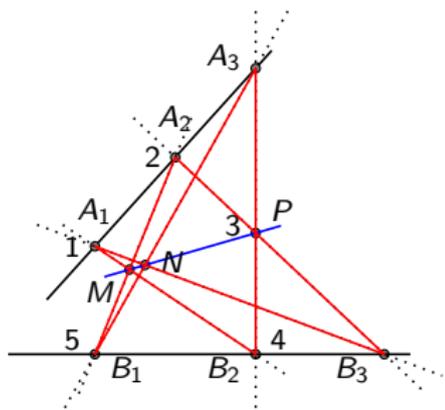
Os números referem-se aos  $F_i$ 's usados na IT

**Demonstração.** (Aicardi' 11)

Na identidade de Tomihisa considere-se

$$F_1 = A_1, \quad F_2 = A_2, \quad F_3 = P = A_2B_3 \cap A_3B_2, \quad F_4 = B_2, \quad F_5 = B_1,$$

# Demonstração do teorema de Pappus



Como

$$\begin{aligned} [[A_2, P], [B_2, B_1]] &= A_2P \cap B_1B_2 = B_3 \\ [[A_2, A_1], [B_2, P]] &= A_1A_2 \cap B_2P = A_3, \\ [[A_2, B_1], [B_2, A_1]] &= A_2B_1 \cap A_1B_2 = M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= [A_1, [[A_2, P], [B_2, B_1]]] \\ &+ [B_1, [[A_2, A_1], [B_2, P]]] \\ &+ [P, [[A_2, B_1], [B_2, A_1]]] \end{aligned}$$

A IT reduz-se a:

$$0 = [A_1, B_3] + [B_1, A_3] + [P, M].$$

Que significa que vectores de  $\mathbb{R}^3$  que representam os pontos projectivos  $[A_1, B_3]$ ,  $[B_1, A_3]$ ,  $[P, M]$  são vectores coplanares. Ou seja, os pontos  $P$ ,  $M$  e  $N = A_1B_3 \cap A_3B_1$  são colineares.



Nota:

A prova diz-nos:

Teorema de Pappus  $\iff$  identidade de Tomihisa.

Dual do Teorema de Pappus  $\iff$  identidade de Tomihisa

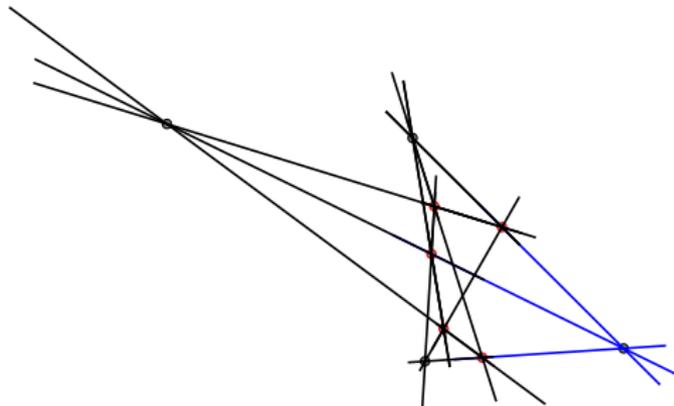
# Dual do T. Pappus

## Teorema (dual do T. Pappus)

Dados dois feixes de retas concorrentes,  $(a_1, a_2, a_3)$  e  $(b_1, b_2, b_3)$ , então as retas

$$m = (a_1 \cap b_2)(a_2 \cap b_1), \quad p = (a_2 \cap b_3)(a_3 \cap b_2), \quad n = (a_1 \cap b_3)(a_3 \cap b_1)$$

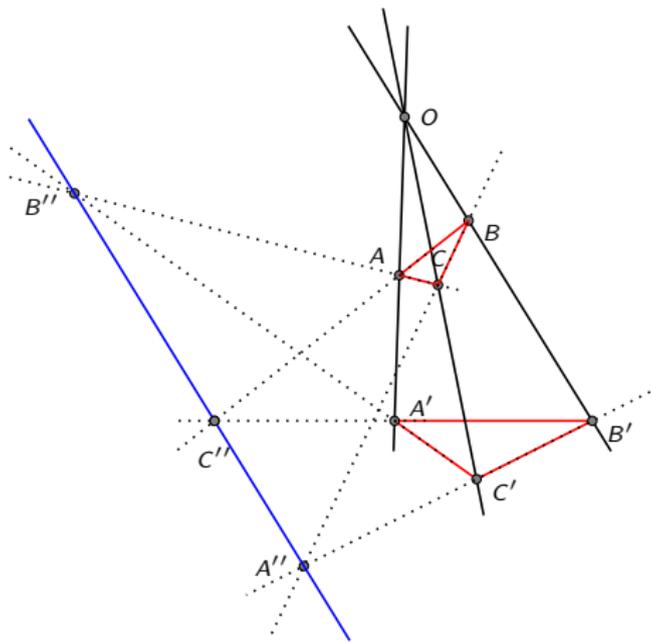
são concorrentes.



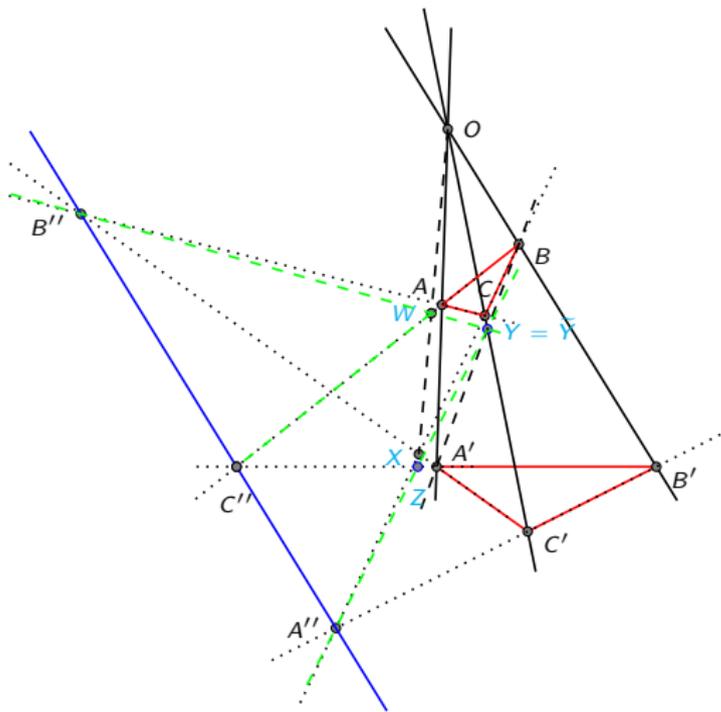
# Teorema de Desargues

## Teorema

Dois triângulos estão em perspectiva a partir de um ponto se e só se estão em perspectiva a partir de uma reta.



# Prova do T. Desargues (SG & ESD-2020)



1.  $(B', B, O), (X, C', A')$   
colineares com

$$O = AA' \cap BB', X = BC \cap A'B'.$$

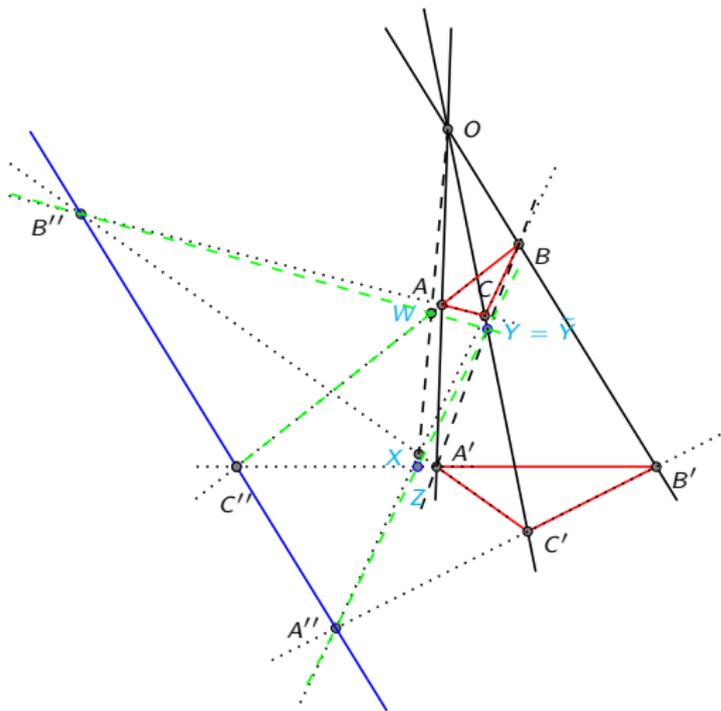
Usando TI, são colineares:

$$C'O \cap A'B = Y,$$

$$OX \cap A'B' = Z,$$

$$B'C' \cap BX = A''.$$

# Prova do T. Desargues (SG & ESD-2020)



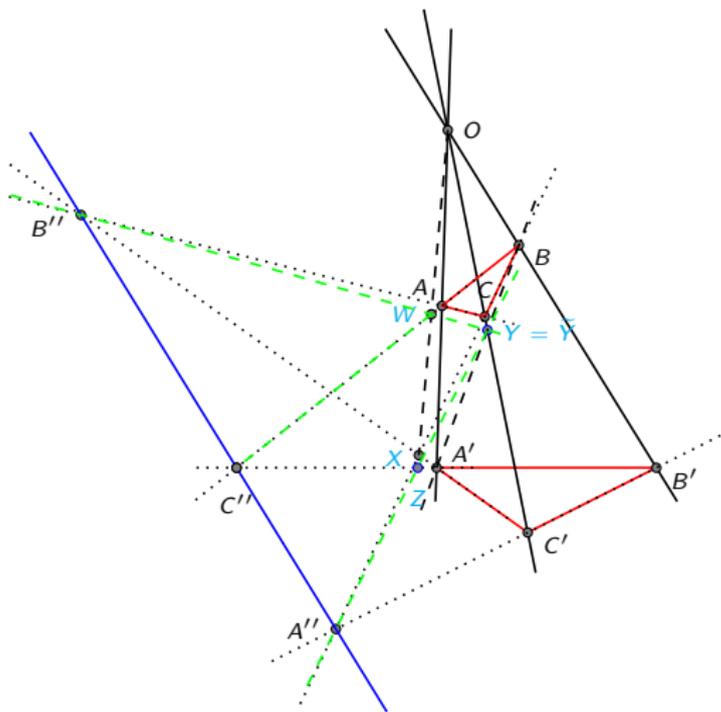
2.  $(A, A', O), (X, C, B)$   
colineares. Usando IT, são  
colineares:

$$CO \cap A'B = \tilde{Y},$$

$$OX \cap AB = W,$$

$$AC \cap A'X = B''.$$

# Prova do T. Desargues (SG & ESD-2020)



3.  $(B, A', \tilde{Y}), (Z, X, W)$  são colineares. Usando TI, são colineares:

$$\underbrace{A'X \cap \tilde{Y}W}_{B''}, \underbrace{A'Z \cap BW}_{C''}, \underbrace{BX \cap Z\tilde{Y}}_{\tilde{A}}$$

Finalmente,

$$\tilde{A} = A'' \iff \tilde{Y} = Y.$$

Equivalentemente, os  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  estão em perspectiva de centro  $O$  se e só se  $A'', B'', C''$  colineares.

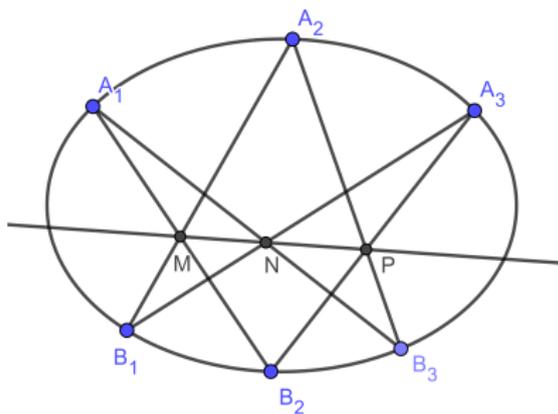
# Generalizações do T. de Pappus

## Teorema de Pascal

Dados dois ternos de pontos numa cónica,  $(A_1, A_2, A_3)$ ,  $(B_1, B_2, B_3)$ , então os pontos

$$P = A_2B_3 \cap A_3B_2, \quad M = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad N = A_1B_3 \cap A_3B_1$$

são colineares.



Quaisquer 5 pontos definem uma única cónica:

- se os 5 pontos não são colineares três a três, então a cónica é não degenerada  $\rightsquigarrow$  **Teorema de Pascal**
- se 3 pontos são colineares então a cónica é degenerada (dois pares de retas).  $\rightsquigarrow$  **Teorema de Pappus**

# Demonstração do Teorema de Pascal

- Definição de uma cônica através de uma identidade que apenas usa determinantes de matrizes  $3 \times 3$ ;
- Usar a identidade de Tomihisa, a bilinearidade de  $\langle , \rangle_{\mathcal{Q}}$  e a antisimetria do parêntesis de Lie para obter:

$$\begin{aligned} &\langle [[Q_3, Q_2], [Q_1, Q_6]], [Q_5, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}} - \langle [[Q_3, Q_4], [Q_5, Q_6]], [Q_1, Q_2] \rangle_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + \langle [[Q_5, Q_2], [Q_3, Q_6]], [Q_1, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

- Colinearidade dos pontos  
 $P = A_2B_3 \cap A_3B_2, M = A_1B_2 \cap A_2B_1, N = A_1B_3 \cap A_3B_1$  é equivalente

$$\langle \overbrace{[[[A_3, B_2], [A_2, B_3]]]}^P, \overbrace{[[[A_1, B_3], [A_3, B_1]]]}^N, \overbrace{[[[A_2, B_1], [A_1, B_2]]]}^M \rangle_{\mathcal{Q}} = 0$$

- Por (2) a colinearidade é equivalente:

$$\langle [[[A_3, B_2], [A_1, B_2]], [[A_2, B_1], [A_3, B_1]], [[A_1, B_3], [A_2, B_3]] \rangle_{\mathcal{Q}} - \langle [[[A_1, B_2], [A_1, B_3]], [[A_3, B_2], [A_3, B_1]], [[A_2, B_1], [A_2, B_3]] \rangle_{\mathcal{Q}} = 0$$

- Manipulando algebricamente esta equação usando as igualdades

$$\langle Q_1, [Q_2, Q_3] \rangle_{\mathcal{Q}} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$[[Q_1, Q_2], [Q_1, Q_3]] = 2^4 \cdot \langle Q_1, [Q_2, Q_3] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot Q_1$$

- Obtém-se que os 6 pontos verificam a equação de uma cónica:

$$\langle B_2, [A_3, A_1] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle B_1, [A_2, A_3] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle B_3, [A_1, A_2] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle B_3, [B_2, B_1] \rangle_{\mathcal{Q}} - \langle A_1, [B_2, B_3] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle A_3, [B_2, B_1] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle A_2, [B_1, B_3] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle A_2, [A_1, A_3] \rangle_{\mathcal{Q}} = 0$$



## Recíproco do T.Pascal

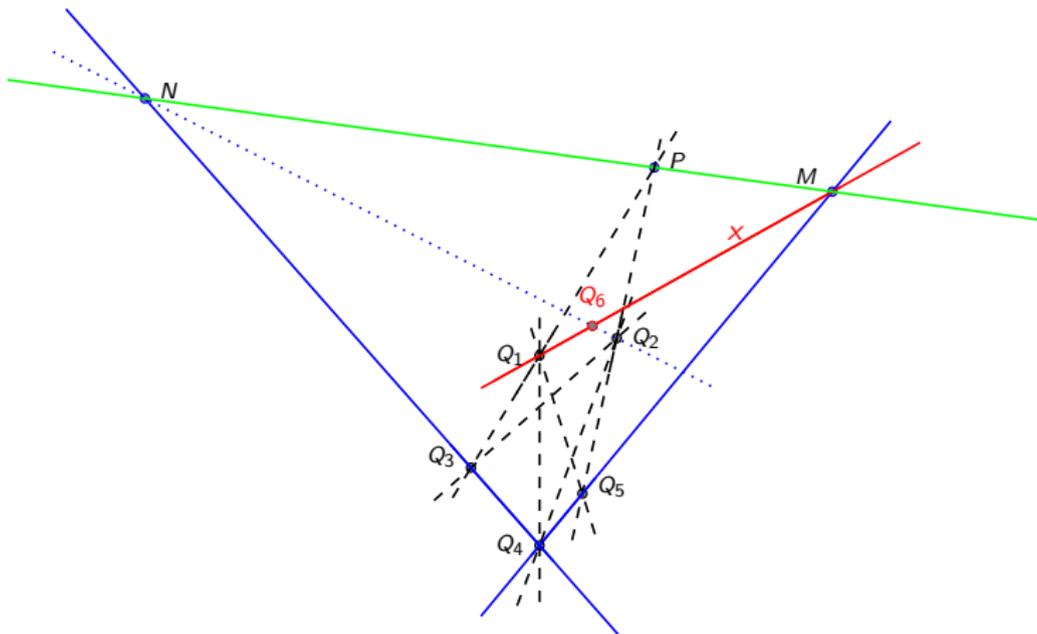
### Nota

Esta prova do T. de Pascal dá um "sse"  $\implies$  recíproco T. de Pascal válido.

### T. de Braikenridge-Maclaurin

Sejam 6 pontos  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ . Se P,M,N (definidos como anteriormente) são colineares, então os 6 pontos estão numa cónica.

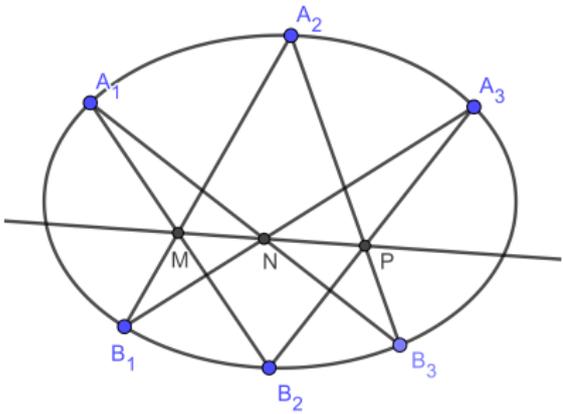
Este teorema permite construir geometricamente a cônica definida por 5 pontos dados  $Q_1, \dots, Q_5$ :



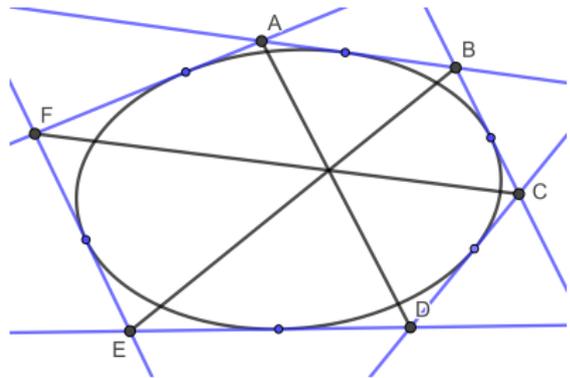
# Teorema de Brianchon (Dual do teorema de Pascal)

## T. de Brianchon

Dado um hexágono circunscrito numa cónica, as suas diagonais (retas definidas por vértices opostos) são concorrentes num ponto.



(a) Teorema de Pascal



(b) Teorema de Brianchon

## Referências

- Francesca Aicardi, *Projective geometry from Poisson algebras*, Journal of Geometry and Physics, 1574–1586 (2011).
- V. Arnold, *Lobachevsky triangle altitudes theorem as the Jacobi identity in the Lie algebra of quadratic forms on symplectic plane*, Journal of Geometry and Physics, 421–427 (2005).
- Toshio Tomihisa, *Geometry of projective plane and Poisson structure*, Journal of Geometry and Physics, 673–684 (2009).