Medidas de Radon e Teorema de Representação de Riesz

Manuel Dias

IST

2020

Medidas e σ-algebras

Definição: (σ-algebra)

Dizemos que $\mathcal{M}$ é uma σ-algebra se é uma colecção de conjuntos fechada para uniões contáveis e complementares.

Definição: (medida)

Se $\mathcal{M}$ é σ-algebra, dizemos que $\mu : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ é medida se:
(i)$\{A_n\}$ conjuntos dijuntos, então $\mu(\cup A_n) = \sum_n \mu(A_n)$
(ii)$\mu(\emptyset) = 0$

Chamamos $\mathbf{B}(X)$ a σ-algebra gerada pelos abertos de X.

Medidas exteriores

Definição: (medida exterior)

Dizemos que $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbf{R}$ é medida exterior se:
(i) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subset B$
(ii) $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$
(iii) $\mu(\emptyset) = 0$

Teorema: (Carathéodory)

Se $\mathcal{M}$ é σ-álgebra e μ é medida exterior então o conjunto:

$$\{E \in \mathcal{M} : \mu(E \cap F) + \mu(F - E) = \mu(F) \text{ para todo o } F \in \mathcal{M}\}$$

é σ-álgebra e μ é uma medida restrita a essa σ-álgebra

Medidas exteriores

Se (X, d) for espaço métrico, podemos considerar medidas exteriores com a seguinte propriedade, se $d(E, F) > 0$ então:

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$$

Isto é uma forma de relacionar medidas com a topologia de X, e como tal estas medidas também geram uma σ-álgebra gerada pela topologia:

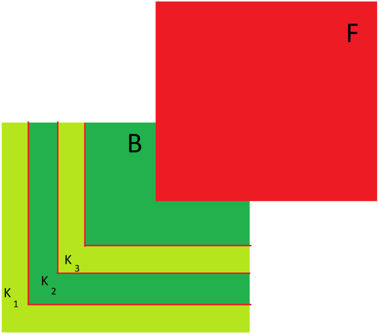
Teorema:

Se μ é medida exterior com a propriedade acima, então esta é uma medida de Borel

Dem: Sabemos que o conjunto $\{E \in \mathbf{B}(X) : \mu(E \cap F) + \mu(F - E) = \mu(F) \text{ para todo o } F \in \mathcal{B}(X)\}$ é σ-álgebra e que μ é medida bem definida nesta σ-álgebra. Se mostrarmos que os conjuntos fechados estão nesta σ-álgebra, então sabemos que tem de ser igual a $\mathcal{B}(X)$.

Medidas exteriores

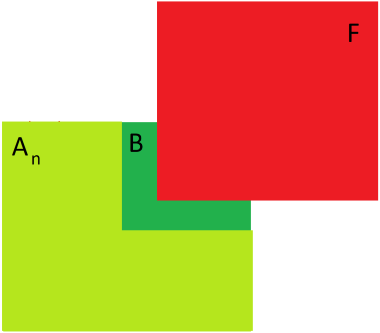
Queremos então mostrar que se $B \in \mathcal{B}(X)$ e F é um fechado, então $\mu(B \cap F) + \mu(B - F) \leq \mu(B)$ por isso assumimos $\mu(B) < \infty$



Consideramos os conjuntos $K_n = \{x \in B - F : \frac{1}{n} \leq d(x, F) < \frac{1}{n+1}\}$ e notamos que $\{K_{2n}\}_{n \in [N]}$ estão todos a distância finita uns dos outros. Usando a propriedade da medida obtemos $\sum_{n=1}^{N} \mu(K_{2n}) = \mu(\cup_{n \in [N]} K_{2n}) \leq \mu(B)$. Como $\mu(B)$ é finito $\sum_n \mu(K_{2n}) < \infty$. Este mesmo argumento se aplica aos impares, pelo que $\sum_n \mu(K_n) < \infty$

Medidas exteriores

Considerando o conjunto $A_n = \{x \in B - F : d(x, F) > \frac{1}{n}\}$ este está a distância finita de F, pelo que
$\mu(A_n) + \mu(F \cap B) = \mu(A_n \cup (F \cap B)) \leq \mu(B)$



Por outro lado
$\mu(B - F) + \mu(F \cap B) \leq$
$\mu((B - F) - A_n) + \mu(A_n) + \mu(F \cap B) \leq$
$\mu((B - F) - A_n) + \mu(B)$ como
$\mu((B - F) - A_n) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \mu(K_j)$
majorado pela cauda de uma serie finita, $\mu((B - F) - A_n) \to 0$ pelo que $\mu(B \cap F) + \mu(F \cap B) \leq \mu(B)$ concluindo a prova.

Teorema de Riesz

Teorema:

Se X é espaço de Hilbert e T funcional contínuo, então existe $y \in X$ tal que $T(x) =< y, x >$

$L^2(X, \lambda)$ que são as funções tais que $\int f^2 d\lambda < \infty$ é um espaço de Hilbert com o produto interno $< f, g >= \int fgd\lambda$. Isto deve-se à desigualdade de Hölder $< f, g >\leq ||f||_{L^2(X,\lambda)}||g||_{L^2(X,\lambda)}$.

Corolário:

Se $T : X \to \mathbf{R}$ funcional contínuo em $L^2(X, \lambda)$ então existe $g \in L^2(X, \lambda)$ tal que $T(f) = \int fgd\lambda$

Medidas de Radon

Definição:

Dizemos que uma medida de Borel $(\mu, \mathcal{B}(X))$ é uma medida de Radon se:
(i)μ é finito em conjuntos compactos,
(ii)$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}$ para E Borel.
(iii)$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U,\ K \text{ compacto}\}$ para U aberto

Se X for um espaço métrico separável localmente compacto, então é σ-compacto, pelo que se μ for uma medida finita em compactos então μ é σ-finito.

Teorema:

Se μ uma medida de Borel, então:
$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$ se μ for σ-finito
e
$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}$ se $X = \cup U_n$ abertos e $\mu(U_n) < \infty$

Teorema de Riesz

Se (X, d) for espaço métrico, consideramos $C_0(X)$ o completado na norma uniforme de $C_c(X)$ que são as funções contínuas com suporte compacto. O teorema de Riesz caracteriza os funcionais contínuos deste espaço.

Teorema:

Se $T : C_0(X) \to \mathbf{R}$ é funcional contínuo então existe medida de Radon única μ tal que $T(g) = \int_X g d\mu$ e $||T|| = \sup\{T(g) : ||g||_\infty \leq 1\} = |\mu|(X)$, ou seja o dual de $C_0(X)$ é isomorfo às medidas de Radon.

Teorema de Riesz

Exercise 1.13 (Sketch of the proof of the Riesz theorem) Notice first that the case $m > 1$ easily follows from the case $m = 1$.

Put $\lambda(A) = \sup\{L(u) : u \in C_c(X),\ 0 \le u \le 1,\ \operatorname{supp} u \subset A\}$ for every open set $A \subset X$, and $\lambda(B) = \inf\{\lambda(A) : A \text{ open},\ B \subset A\}$ for every $B \subset X$. Then prove that λ is an outer measure by arguing as follows.

(a) Prove that if the σ-subadditivity and the additivity condition (1.6) hold for the open sets then the general case readily follows.

(b) To prove the σ-subadditivity on the open sets, fix A, (A_h) open, with $A \subset \bigcup A_h$, take $u \in C_c(X)$ with $0 \le u \le 1$, $\operatorname{supp} u \subset A$ and use a partition of unity argument on the compact support of u together with the additivity assumption on L to conclude. Proceed in an analogous way for condition (1.6).

(c) Prove that $L(u) \le 2\int_X |u|\, d\lambda$; to this aim, reduce to $0 \le u \le 1$ and, for every integer $n \ge 1$ and $h = 1, \ldots, n-1$, set $K_h = \{x \in X : h/n \le u(x) \le (h+1)/n\}$. Choose open sets $U_h \supset K_h$ such that $\lambda(U_h \setminus K_h) < 1/n^2$, $u(x) \le (h+1)/n + 1/n^2$ for $x \in U_h$, and argue as in point (b) to get

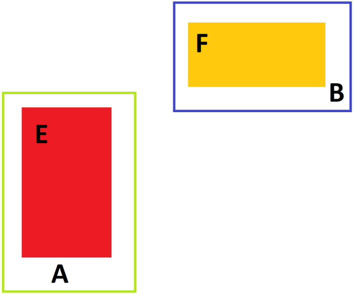
$$\begin{aligned} |L(u)| &\le |L(1/n - (u - 1/n)^-)| + |L((u - 1/n)^+)| \\ &\le \frac{\|L\| + 2\lambda(X) + 1}{n} + 2\int_X u\, d\lambda \end{aligned}$$

and pass to the limit as $n \to +\infty$.

(d) Use the Riesz representation theorem in Hilbert spaces and the Hölder inequality to extend L to $L^2(X, \lambda)$ and to construct μ. Then, use Proposition 1.23 to get $\|L\| = |\mu|(X)$. Finally, uniqueness follows from Remark 1.18.

Dem: Se T funcional, consideramos $\lambda(A) = \sup\{T(u) : u \in C_c(X), 0 \leq u \leq 1, \ \mathrm{supp}(u) \subset A\}$ se A aberto e $\lambda(E) = \inf\{\lambda(A) : E \subset A, \ A \text{ aberto}\}$ para E arbitrário. Queremos mostrar que esta medida é uma medida de Radon. Para tal mostramos que λ é uma medida exterior com a propriedade de distância anterior, o que mostra que é uma medida nos Boreis. Para começar mostramos que se λ satisfizer as propriedades:
(i) $\lambda(\cup_n A_n) \leq \sum_n \lambda(A_n)$
(ii) Se $d(A, B) > 0$ então $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$
para os abertos, então satisfará para todos os conjuntos no geral. Se $\{E_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ forem conjuntos arbirários, consideramos abertos $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que $E_n \subset A_n$ e $\lambda(A_n) - \lambda(E_n) \leq \epsilon_n$ como tal $\lambda(\cup_n E_n) \leq \lambda(\cup_n A_n) \leq \sum_n \lambda(A_n) \leq \sum_n \lambda(E_n) + \epsilon_n$ e como para todo o $\epsilon > 0$ é possível escolher ϵ_n tal que $\sum_n \epsilon_n \leq \epsilon$ conclui-se a subaditividade.

Teorema de Riesz



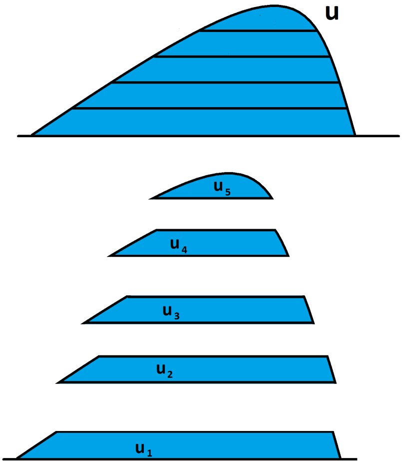
A outra propriedade prova-se de forma semelhante. Se E, F tais que $d(E, F) = \alpha > 0$ é possível criar abertos A, B tais que $E \subset A$ e $F \subset B$ e $d(A, B) > 0$ $(A = \cup_{x \in A} B(x, \frac{\alpha}{3})$, $B = \cup_{x \in B} B(x, \frac{\alpha}{3}))$.
Aproximando E e F por outros abertos A' e B' que aproximem a medida λ de E e F e intersetando com os anteriores, aproximamos a medida e estes são dijuntos. Ao usar a propriedade da distância de λ a estes abertos com a aproximação concluímos que
$\lambda(E \cup F) = \lambda(E) + \lambda(F)$

Se A aberto $\lambda(A) = \sup\{T(u) : u \in C_c(A), 0 \leq u \leq 1\}$
Queremos agora mostrar que a medida λ é subaditiva e satisfaz a propriedade da distância nos abertos. Para a subaditividade usamos partições de unidade de X que assumimos espaço métrico com base contável. Consideramos $\{A_n\}_n$ abertos. Consideramos $u \in C_c(\cup_n A_n)$ e $0 \leq u \leq 1$, para além disso consideramos partição de unidade $\{\rho_n\}_n$ subordinada a $\{A_n\}_n$, (supp$\rho_n \subset A_n$ é de notar que como u tem suporte compacto então $\rho_n u$ também terá, nomeadamente como o suporte de u é compacto podemos só considerar um número finito de ρ_n) então:

$$T(u) = T(\sum_n \rho_n u) = \sum_n T(\rho_n u) \leq \sum_n \lambda(A_n)$$

Tomando o supremo obtemos a subaditividade.

Teorema de Riesz



Agora que sabemos que λ é medida de Radon queremos mostrar que $|T(u)| \leq \int 2|u| d\lambda$. Para tal mostramos para funções u tais que $\leq u \leq 1$. Dada uma função u e um natural n tomamos os conjuntos $K_h = \{x \in X : \frac{h}{n} \leq u(x) \leq \frac{h+1}{n}\}$ e criamos as funções:

$$u_h(x) = \begin{cases} u(x) - \frac{h}{n} & \text{if } x \in K_h \\ 0 & \text{if } x \in u^{-1}(]-\infty, \frac{h}{n}]) \\ \frac{1}{n} & \text{if } x \in u^{-1}([\frac{h+1}{n}, +\infty[) \end{cases}$$

Teorema de Riesz

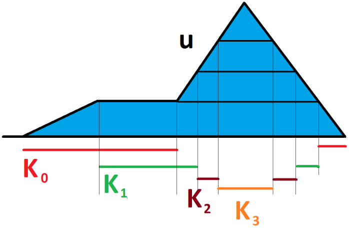
Temos então que $0 \leq u_h \leq \frac{1}{n}$ por isso $0 \leq nu_h \leq 1$. Aproximamos K_h por um aberto $K_h \subset A_h$ tal que $\lambda(A_h - K_h) \leq \frac{1}{n^2}$, então $\text{supp}(u_h) \subset \cup_{j \geq h} K_j \subset \cup_{j \geq h} A_j$ como tal:

$$|T(u)| = |\sum_{h=0}^{n-1} T(u_h)| \leq \sum_{h=0}^{n-1} |T(u_h)| = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{n} |T(nu_h)| \leq \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{n} \lambda(\cup_{i \geq h} A_i)$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i \geq h} \frac{1}{n} \lambda(A_i) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{h+1}{n} \lambda(A_h) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{h+1}{n} (\lambda(A_h - K_h) + \lambda(K_h)) \leq$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \frac{h+1}{n} (\lambda(K_h)) + \frac{1}{n}$$

Teorema de Riesz



Aproximações do integral:
$\sum_{h=0}^{n-1} \frac{h}{n}\lambda(K_h - K_{h-1}) \leq \int |u| d\lambda$
$\sum_{h=0}^{n-1} \frac{h}{n}\lambda(K_h \cap K_{h-1}) \leq \int |u| d\lambda$

$|T(u)| \leq \sum_{h=0}^{n-1} \frac{h+1}{n}(\lambda(K_h)) + \frac{1}{n} =$
$\sum_{h=0}^{n-1} \frac{h+1}{n}(\lambda(K_h - K_{h-1}) + \lambda(K_h \cap K_{h-1})) + \frac{1}{n} \leq$
$2\int |u| d\lambda + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{n}(\lambda(K_h - K_{h-1}) + \lambda(K_h \cap K_{h-1})) + \frac{1}{n} \leq 2\int |u| d\lambda + \frac{1+2\lambda(X)}{n}$

Teorema de Riesz

Como λ é medida de Radon finita temos que $C_c(X)$ é denso em $L^2(X, \lambda)$. Isto vem do facto de as funções simples serem densas em $L^2(X, \lambda)$ e qualquer função simples conseguir ser aproximada em $L^2(X, \lambda)$ por uma função em $C_c(X)$. Se E λ-mensurável, então aproximamos por $K \subset E \subset U$ tal que $\lambda(E - K) < \epsilon$ e $\lambda(U - K) < \epsilon$. Usando o lema de Uryshon obtemos função contínua $u : X \to [0, 1]$ tal que $u(K) = 1$ e $u(X - U) = 0$ pelo que $(\int |u - \chi_E|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda(U - K)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}$

Teorema de Riesz

Como tal prolongamos o funcional T de $C_c(X)$ que permanece contínuo pois $|T(u)| \leq 2\int |u| d\lambda \leq \lambda(X)^{\frac{1}{2}} ||u||_{L^2(X,\lambda)}$
Pelo teorema de Riesz em $L^2(X,\lambda)$ temos que $T(u) = \int ufd\lambda$ para algum $f \in L^2(X,\lambda)$ e como $fd\lambda$ é medida de Radon se λ for concluímos que $T(u) = \int ud\mu$ para $\mu = fd\lambda$ medida de Radon.

$$||T|| = \sup\{\int ud\mu : ||u||_\infty \leq 1\} = |\mu|(X)$$

mostrando que a correspondência é uma isometria concluindo o teorema.

Bibliography

- Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, 1st edition, 2000,Clarendon Press.
- Gerald B. Folland, *Real Analysis and Modern Techniques and their Applications*, 2nd edition 1999, John Wiley and Sons